풀이

STEP II 1993, 문제 5

순수수학 • 극곡선과 곡선의 길이

> **STEP II 1993, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q5

핵심 아이디어

R에서의 직각 덕분에 작은 삼각형 PQR의 모든 길이를 직각삼각형 ORQ로부터 읽어 낼 수 있으며, 이때 필요한 것은 OQ와 작은 각 $\delta\theta$뿐이다. $Q \to P$일 때의 극한(limit)을 취하면 현(chord) PQ가 접선(tangent)으로 바뀐다. 나선의 경우 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$가 r의 상수배이므로 $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$는 어디서나 같고, 호의 길이(arc length)를 구하는 적분의 피적분함수는 단순한 지수함수가 된다.

풀이

곡선과 동경 사이의 각

점 R는 직선 OP(의 연장선) 위에 있고, $\angle ORQ$는 직각이다. 직각삼각형 ORQ에서 빗변(hypotenuse)은 $OQ = r + \delta r$이고 O에서의 각은 $\delta\theta$이므로

$$QR = (r+\delta r)\sin\delta\theta, \qquad OR = (r+\delta r)\cos\delta\theta.$$

$OP = r$이므로 $PR = OR - OP = (r+\delta r)\cos\delta\theta - r$이다. 삼각형 PRQ는 R에서 직각인 직각삼각형이므로

$$\tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{(r+\delta r)\sin\delta\theta}{(r+\delta r)\cos\delta\theta - r}.$$

$\delta\theta$가 작을 때 $\sin\delta\theta = \delta\theta + O(\delta\theta^3)$이고 $\cos\delta\theta = 1 + O(\delta\theta^2)$이므로

$$\tan\angle QPR = \frac{r\,\delta\theta + \delta r\,\delta\theta + \cdots}{\delta r + O(\delta\theta^2)} = \frac{r\dfrac{\delta\theta}{\delta r} + \delta\theta + \cdots}{1 + O\left(\dfrac{\delta\theta^2}{\delta r}\right)},$$

이다. 여기서 점들은 나타낸 항들에 비해 작은 항들이다. $Q \to P$이면 δr와 $\delta\theta$가 모두 0으로 가고 $\delta\theta/\delta r \to \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$이다. 따라서 $\delta\theta^2/\delta r = \delta\theta \cdot (\delta\theta/\delta r) \to 0$이고, 또한 $\delta\theta \to 0$이다. 그러므로

$$\tan\angle QPR \to r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

? **생각해 보기** 왜 $\angle QPR$의 극한이 곡선이 OP와 만나는 각이 되는가?

각 QPR는 현 PQ와 P를 지나는 동경 직선 사이의 각이다. 곡선을 따라 $Q \to P$일 때, 현 PQ는 P에서의 접선으로 바뀐다. 따라서 극한에서 $\angle QPR$는 접선과 OP 사이의 각이 되며, 이것이 바로 "곡선이 OP와 만나는 각"의 뜻이다. 그러므로 그 각은

$$\tan^{-1}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

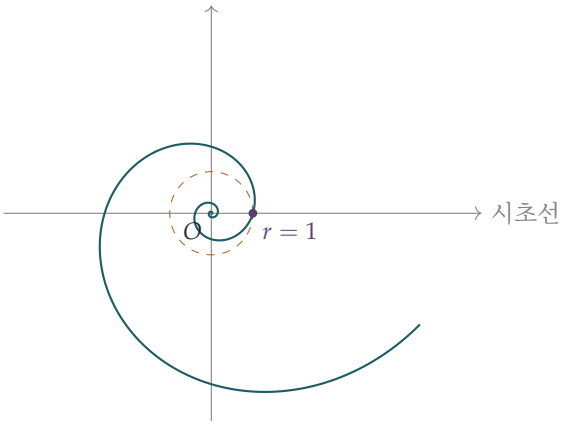
등각나선

$r = \mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}$에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cot\alpha\,\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 각 α는 $\tan^{-1}$의 치역 안에 있고, 따라서 $\tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$이다. 이 값은 θ에 의존하지 않으므로, 나선은 모든 점에서 모든 동경 직선과 각 α로 만난다.

개형. $\cot\alpha > 0$이므로 r는 θ에 따라 꾸준히 증가한다. 한 바퀴 돌 때마다 r에 일정한 인수 $\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}$가 곱해진다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 0$이므로, 곡선은 원점에 결코 도달하지 않으면서 원점 주위를 무한히 많이 감는다. $\theta \to +\infty$일 때는 시계 반대 방향으로 바깥을 향해 나선을 그린다. $\theta = 0$일 때 $r = 1$에서 시초선과 만난다. 개형에서는 $\cot\alpha = 0.3$을 사용하였다.



점선 원은 $r = 1$이다. 그 안쪽에 있는 나선 부분이 안쪽으로 무한히 감기는 부분이다.

호의 길이

주어진 공식과 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = r\cot\alpha$를 이용하면

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + r^2\cot^2\alpha = r^2\operatorname{cosec}^2\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha},$$

이다. s는 θ에 따라 증가하고 $\sin\alpha > 0$이므로 양의 제곱근을 택하였다.

$r = 1$에서 시작하여 바깥으로 도는 한 바퀴는 $\theta = 0$부터 $\theta = 2\pi$까지이다. 그 길이는

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1}{\cot\alpha} = \sec\alpha\left(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1\right).$$

$r \le 1$인 부분은 $\theta \le 0$, 즉 $-\infty < \theta \le 0$인 부분이다. 그 길이는 이상적분(improper integral)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-T\cot\alpha}}{\sin\alpha\cot\alpha} = \sec\alpha,$$

이다. $\cot\alpha > 0$이므로 $\mathrm{e}^{-T\cot\alpha} \to 0$이기 때문이다. 따라서 이 부분은 원점 주위를 무한히 많이 감지만, 전체 길이는 유한하며 그 값은 $\sec\alpha$이다.

검산

- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$이면 $\cot\alpha \to 0$이고, 나선은 단위원이 된다. 단위원은 모든 동경과 직각으로 만난다. 한 바퀴의 길이는 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1) \approx \sec\alpha\cdot 2\pi\cot\alpha = 2\pi\operatorname{cosec}\alpha \to 2\pi$로, 원주와 같다.
- $\sec\alpha$에 대한 멋진 기하학적 검산: 나선을 따라 임의의 점에서 원점까지의 길이는 $r\sec\alpha$이며, 이는 그 점에서 O를 지나고 OP에 수직인 직선까지 그은 접선 선분의 길이와 같다.
- 수치적으로, $\alpha = 0.9$일 때 2×10^5개의 현을 더하면 한 바퀴의 길이는 233.8349, 안쪽 부분의 길이는 1.608726이 나온다. 이 값들은 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1)$ 및 $\sec\alpha$와 적어도 유효숫자 여덟 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 이유를 설명하지 않고 $PR = \delta r$, $QR = r\,\delta\theta$라고 쓰는 것. 둘 다 일차 근사(first order)로만 참이며, 문제가 시험하려는 것이 바로 이 극한 논증이다.
- 안쪽 부분에 대해 $(-\infty, 0]$ 대신 $[0, 2\pi]$에서 적분하는 것. $r \le 1$인 부분은 한 바퀴가 아니라 무한히 많은 바퀴로 이루어져 있다.

STEP 너머

등각나선(equiangular spiral, 로그나선(logarithmic spiral))은 자기 닮음(self-similar)이다. 즉 $e^{2\pi \cot \alpha}$배로, 혹은 어떤 배율로든 확대하면 같은 곡선을 회전한 것이 된다. 복소수로 나타내면 $z = e^{(\cot \alpha + i)\theta}$이고, 이는 지수 사상에 의한 직선의 상이다. 각이 일정하다는 사실은 exp가 등각(conformal, 각을 보존함)이라는 사실에서 나온다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 관점을 아름답게 전개한다. 무한히 감긴 곡선의 길이가 유한하다는 것은 처음 듣는 해석학 강의에서 만나게 될 이상적분과 수렴(convergence) 문제를 처음 맛보는 것이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.