풀이

STEP II 1993, 문제 4

순수수학 • 꼬인 위치의 직선과 최근접 거리

> **STEP II 1993, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q4

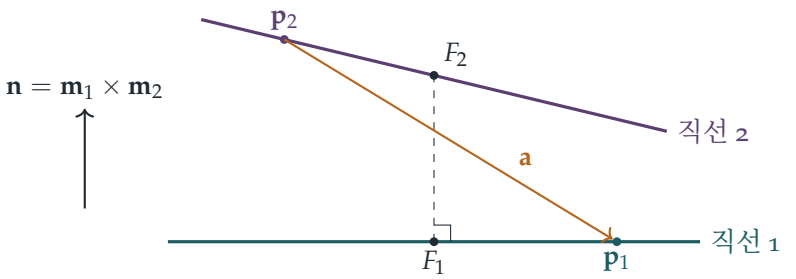
핵심 아이디어

한 직선 위의 점과 다른 직선 위의 점을 잇는 벡터(vector)는 모두 공통법선(common normal) $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ 방향의 성분이 같다. 어느 직선을 따라 움직여도 $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$의 실수배만 더해지는데, 이 두 벡터는 그 법선에 수직이기 때문이다. 이 고정된 성분이 바로 최단 거리(shortest distance)이다. 비행기 문제에서는 A_2의 기준틀(frame)에서 생각하는 것이 요령이다. A_2에서 A_1으로 가는 벡터는 **하나의** 직선을 따라 움직이므로, 가장 가까이 접근하는 거리는 점과 직선 사이의 거리가 된다.

풀이

두 직선 사이의 최단 거리

$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, $\mathbf{n} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$라 하자. 이 벡터는 두 직선이 평행하지 않으므로 영벡터가 아니며, $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$ 모두에 수직이다.



그림은 두 직선(꼬인 위치(skew)에 있으므로 만나지 않는다), $\mathbf{p}_2$에서 $\mathbf{p}_1$으로 가는 벡터 $\mathbf{a}$,

그리고 $\mathbf{n}$에 평행한 공통수선(common perpendicular) F_1F_2를 보여 준다.

직선 2 위의 점에서 직선 1 위의 점으로 가는 일반적인 벡터는

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2.$$

이다. $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$이므로, 단위법선벡터 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 방향의 성분은

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

이고, 이 값은 t_1, t_2를 어떻게 택하든 같다. 벡터의 길이는 그 어떤 성분보다도 작지 않으므로 $|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}|$이고, 등호는 $\mathbf{d}$가 $\mathbf{n}$에 평행할 때, 그리고 그때에만 성립한다. 등호는 실제로 성립한다. $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}$은 한 평면 위에 있지 않으므로 기저(basis)를 이루고, 따라서 $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 + \gamma\mathbf{n}$으로 쓸 수 있다. $t_1 = -\alpha$, $t_2 = \beta$로 택하면 $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{n}$만 남는다. 이렇게 택한 값이 그림의 수선의 발 F_1, F_2를 준다. 그림에서 최단 거리는 $\mathbf{n}$ 방향으로 잰 $\mathbf{a}$의 "높이"이다. 따라서 최단 거리는

$$|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \frac{|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}.$$

이다.

소문항 (i)

여기서 $\mathbf{a} = (1,1,1)$이다. $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$를 영이 아닌 임의의 실수배로 바꾸어도 분자와 분모에서 그 인수가 약분되므로 공식은 변하지 않는다. 따라서 $(4,3,0)$과 $(0,-3,1)$을 써도 된다.

$$(4,3,0) \times (0,-3,1) = (3,-4,-12), \qquad |(3,-4,-12)| = \sqrt{9+16+144} = 13.$$

그러면 $(1,1,1) \cdot (3,-4,-12) = -13$이므로 최단 거리는 $13/13 = 1$이다.

소문항 (ii)

시각 t에 두 비행기는 $\mathbf{p}_1 + v_1 t\,\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{p}_2 + v_2 t\,\mathbf{m}_2$에 있으므로, A_2에서 A_1으로 가는 벡터는

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2.$$

이다. $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$가 평행하지 않으므로 (두 속력이 모두 0이 아닌 한) $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$이다. 비행은 $t = 0$ 이전과 이후의 모든 시각을 포함한다고 보자. 그러면

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + t^2|\mathbf{w}|^2,$$

이고, 이는 최고차항의 계수가 양수인 t에 대한 이차식이다. 완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{w}|^2\Big(t + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\Big)^2 + |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2},$$

이므로, $t = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}/|\mathbf{w}|^2$에서의 최솟값은

$$d^2 = \frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|^2\,|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2 - [(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2)]^2}{|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 기하적으로 d는 원점에서 직선 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$까지의 거리이며, θ를 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{w}$ 사이의 각이라 하면 이 거리는 $|\mathbf{a}|\sin\theta$이다.

소문항 (iii)

먼저 계산이 필요 없는 하한부터 보자. 매 순간 A_1은 직선 1 위에, A_2는 직선 2 위에 있으므로, 소문항 (i)에 의해 $d \geq 1$이다. 등호가 성립하려면 두 비행기가 **동시에** 수선의 발 F_1, F_2에 있어야 한다.

> **생각해 보기** A_2의 조종사가 실제로 그렇게 만들 수 있을까?

수선의 발을 구하자. $\mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2$가 $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$에 수직이라는 조건에 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_1 = \frac{7}{5}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$를 대입하여 두 일차방정식을 풀면

$$t_1 = -\tfrac{20}{13}, \qquad t_2 = \tfrac{\sqrt{10}}{13}.$$

을 얻는다. A_1은 시각 $t_1/v_1 < 0$에 F_1에 있지만, $v_2 > 0$이면 A_2는 시각 $t_2/v_2 > 0$에 F_2에 있다. 이 두 시각은 결코 같을 수 없다. F_1은 $\mathbf{p}_1$의 뒤쪽에 있고 F_2는 $\mathbf{p}_2$의 앞쪽에 있기 때문이다. 따라서 A_2가 $\mathbf{m}_2$ 방향으로 비행하면 $d = 1$이라는 값에 도달할 수 없다. 어떤 값에 도달할 수 있는지 알아보기 위해 소문항 (ii)를 이용한다.

$v_2 = \sqrt{10}\,\lambda v_1$로 놓자. 즉 λ는 척도를 조정한 속력의 비이다. 그러면

$$\mathbf{w} = v_1\left(\tfrac{1}{5}(4,3,0) - \lambda(0,-3,1)\right) = \tfrac{v_1}{5}(4,\ 3+15\lambda,\ -5\lambda),$$

이고, 인수 $\frac{v_1}{5}$는 d^2의 공식에서 약분된다. $|\mathbf{a}|^2 = 3$이므로

$$\mathbf{a}\cdot(4,3+15\lambda,-5\lambda) = 7+10\lambda, \qquad |(4,3+15\lambda,-5\lambda)|^2 = 25+90\lambda+250\lambda^2,$$

이고, 따라서

$$d^2 = 3 - \frac{(7+10\lambda)^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26+130\lambda+650\lambda^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1+5\lambda+25\lambda^2}{5+18\lambda+50\lambda^2}.$$

이다. 마지막 분수 N/D를 미분(differentiation)하면 도함수(derivative)의 분자는 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (5+50\lambda)(5+18\lambda+50\lambda^2) - (1+5\lambda+25\lambda^2)(18+100\lambda) \\ &= 7+150\lambda+200\lambda^2 = (1+20\lambda)(7+10\lambda). \end{aligned}$$

따라서 모든 실수 λ의 함수로 볼 때, d^2은 $\lambda = -\frac{7}{10}$에서 최댓값을 갖고(이때 $\mathbf{a} \perp \mathbf{w}$이고 $d = \sqrt{3}$), $\lambda = -\frac{1}{20}$에서 최솟값을 가지며, 그 최솟값은

$$d^2 = \frac{26}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{5 - \frac{9}{10} + \frac{1}{8}} = \frac{26}{5} \cdot \frac{13/16}{169/40} = 1.$$

이다. 이것이 바로 하한 $d = 1$이며, $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$일 때 도달한다. 이는 수선의 발에서 얻은 t_2/t_1과 일치한다.

따라서 두 비행기는 두 직선 사이의 최단 거리인 $d = 1$까지 가까워질 수 있으며, 그보다 더 가까워질 수는 없다. 이를 이루려면 A_2의 조종사는 직선 2를 따라 $-\mathbf{m}_2$ 방향으로 속력 $\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$로 비행하면 된다. 문제의 기호로는 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$인데, 이는 속력이라기보다 $\mathbf{m}_2$ 방향의 속도이다. 그러면 두 비행기는 같은 순간에 공통수선의 발에 도달한다. 이는 소문항 (i)의 답을 재현하며, 아마도 출제자가 의도한 답일 것이다. 답이 비 v_2/v_1에만 의존한다는 점에 주목하자.

양의 속력에 대한 참고. v_2가 진짜 속력이어야 해서 $v_2 > 0$이고 $\lambda > 0$이라면, $(1 + 20\lambda)(7 + 10\lambda) > 0$이므로 d^2은 v_2에 대해 순증가한다.

$$d^2 \to \frac{26}{25} \quad \text{조건: } v_2 \to 0^+, \qquad d^2 \to \frac{13}{5} \quad \text{조건: } v_2 \to \infty.$$

이렇게 해석하면 최선의 속력은 없다. 조종사는 느리게 날수록 유리하며, 가장 가까운 접근 거리는 $\mathbf{p}_2$에서 직선 1까지의 거리인 $\frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1.020$에 원하는 만큼 가깝게 만들 수 있지만, 결코 그 값에 도달하지는 못한다.

검산

- (i)의 공통수선: $t_1 = -\frac{20}{13}$, $t_2 = \frac{\sqrt{10}}{13}$일 때 두 점을 잇는 벡터는 $\frac{1}{13}(-3, 4, 12)$이고, 이는 $(3, -4, -12)$에 평행하며 길이가 정확히 1이다.
- 컴퓨터로 임의의 속력들에 대해 직접 탐색하여 $|\mathbf{r}(t)|$를 최소화했더니 (ii)의 공식과 10^{-6} 이내로 일치했다. 또한 v_2/v_1을 $[-2, 2]$ 범위에서 훑어본 결과, 최솟값은 $v_2/v_1 \approx -0.1581 = -1/(2\sqrt{10})$에서 $d^2 = 1.0000$이었고, $v_2 > 0$에서는 d^2이 1.04부터 증가했다.
- 극한의 경우: $v_2 = 0$이면 A_2는 $\mathbf{p}_2$에 고정된 점이 되고, $3 - (\frac{7}{5})^2 = \frac{26}{25}$는 실제로 $\mathbf{p}_2$에서 직선 1까지의 거리의 제곱이다.

흔한 실수

- 두 비행기가 같은 순간에 공통수선의 발에 도달할 수 있는지 확인하지 않고 (iii)에 "소문항 (i)에 의해 1"이라고 답하는 것.

- (ii)의 공식이 $\mathbf{w}$의 크기를 바꾸어도 변하지 않는다는 사실을 잊고, 여러 쪽에 걸친 계산 내내 v_1을 달고 다니는 것.
- 직선 사이의 거리 공식에서 절댓값을 빠뜨려 -1을 얻는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 **정사영**(orthogonal projection)의 작은 예이다. d는 $\mathbf{a}$의 성분 중 $\mathbf{w}$에 수직인 성분의 길이이고, $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{w}|^2$은 그람 행렬식(Gram determinant), 즉 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{w}$로 만든 평행사변형의 넓이의 제곱이다. 대학의 첫 선형대수학 강의에서 배우는 최소제곱 근사(least-squares fitting)도 같은 사영의 아이디어에 바탕을 둔다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이를 훌륭하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.