풀이

STEP II 1993, 문제 3

순수수학 • 리카티 미분방정식

> **STEP II 1993, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q3

핵심 아이디어

두 방정식 모두 y^2 항 때문에 비선형(nonlinear)이므로, 표준적인 일계(first-order) 풀이법을 바로 적용할 수 없다. 주어진 치환(substitution)은 바로 이 y^2 항을 없애도록 고안된 것이다. (i)에서는 y를 u'/u의 상수배로 쓰면 제곱 항들이 상쇄되어 상수 계수(constant coefficients)를 갖는 선형 이계(linear second-order) 방정식이 남는다. (ii)에서는 마침 $y = 1/x$가 정확한 해이므로, $y = 1/x + 1/v$로 쓰면 방정식이 v에 대한 선형 일계 방정식이 되고, 이는 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$y = -\dfrac{u'}{3u}$로 놓자. 여기서 $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u''}{3u} + \frac{(u')^2}{3u^2}, \qquad \text{그리고} \qquad 3y^2 = 3 \cdot \frac{(u')^2}{9u^2} = \frac{(u')^2}{3u^2}.$$

따라서 까다로운 항들이 상쇄된다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = -\frac{u''}{3u}.$$

그러므로 방정식 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y - 3y^2 = -2$는 다음과 같이 된다.

$$-\frac{u''}{3u} + \frac{u'}{3u} = -2.$$

양변에 $-3u$를 곱하면($u \neq 0$이어야 하는데, 이는 어차피 y가 정의되기 위해 필요한 조건이다)

$$u'' - u' - 6u = 0.$$

특성방정식(auxiliary equation)은 $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$이므로 $m = 3$ 또는 $m = -2$이고,

$$u = Ae^{3x} + Be^{-2x}$$

이다. 여기서 A와 B는 상수이며 둘 다 영은 아니다. 그러면 $u' = 3Ae^{3x} - 2Be^{-2x}$이고

$$y = -\frac{u'}{3u} = \frac{2Be^{-2x} - 3Ae^{3x}}{3\left(Ae^{3x} + Be^{-2x}\right)}.$$

생각해 보기 일계 방정식에는 임의상수(arbitrary constant)가 하나 있어야 한다. 그런데 왜 두 개가 나왔을까?

중요한 것은 A와 B의 비뿐이다. u에 영이 아닌 상수를 곱해도 u'/u는 변하지 않기 때문이다. $A \neq 0$이면 분자와 분모를 Ae^{3x}로 나누고 $K = B/A$로 쓰면

$$y = \frac{2Ke^{-5x} - 3}{3\left(1 + Ke^{-5x}\right)} = \frac{2K - 3e^{5x}}{3\left(e^{5x} + K\right)},$$

이고, 여기서 K는 임의상수이다. $A = 0$인 경우는 상수해 $y = \frac{2}{3}$을 주는데, 이는 $K \to \infty$일 때 이 해들의 극한이다. $K = 0$으로 두면 또 다른 상수해 $y = -1$을 얻는다. 검산해 보면, 상수해는 $-y - 3y^2 = -2$, 즉 $(3y-2)(y+1) = 0$을 만족한다.

소문항 (ii)

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$로 놓자. 그러면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2},$$

이므로

$$\begin{aligned} x^2\frac{dy}{dx} &= -1 - \frac{x^2v'}{v^2}, \\ xy &= 1 + \frac{x}{v}, \\ x^2y^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}. \end{aligned}$$

이 세 줄을 더하면 방정식 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$은

$$1 - \frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 1, \qquad \text{즉,} \qquad -\frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 0.$$

이 된다. 양변에 v^2/x^2를 곱하면(방정식이 요구하는 대로 $x \neq 0$이다) 다음 선형 방정식을 얻는다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}v = 1.$$

적분인자는 $\exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x^{-3}$이다(구간 $x > 0$과 $x < 0$ 중 어느 쪽에서든 그렇다. 적분인자의 상수배도 똑같이 적분인자 역할을 하므로 절댓값 기호는 떼어도 된다). 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c \quad\Longrightarrow\quad v = cx^3 - \tfrac{1}{2}x = \frac{x\left(Kx^2-1\right)}{2},$$

이고, 여기서 c는 임의상수이며 $K = 2c$이다. 그러므로

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\left(Kx^2-1\right)} = \frac{Kx^2+1}{x\left(Kx^2-1\right)},$$

이고 K는 임의상수이다. $K = 0$으로 두면 $y = -1/x$를 얻는다. 이 치환은 $1/v$가 존재한다고 가정했으므로 $y = 1/x$ 자체("$v = \infty$")는 놓친다. $x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 + 1 = 1$이므로 이것 역시 해이며, $K \to \infty$일 때 이 해들의 극한이다.

검산

- (i)에서 $x = 0$일 때 해는 $y(0) = \dfrac{2K-3}{3(1+K)}$이다. $x \to +\infty$이면 $y \to -1$이고, $x \to -\infty$이면 $y \to \frac{2}{3}$이다($K \neq 0$일 때). 따라서 해들은 한 상수해에서 다른 상수해로 이어지며, 이는 예상한 대로이다.
- (ii)에서 $K = 1$, $x = 2$로 두면 $y = \frac{5}{6}$이고 $y'(2) = -\frac{31}{36}$이다. 그러면 $x^2y' + xy + x^2y^2 = -\frac{31}{9} + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} = 1$로, 요구한 대로 성립한다.
- 두 일반해(general solution) 모두 수백 개의 무작위 점과 K 값에서 유한차분(finite differences)으로 수치적으로 확인하였다. 원래 방정식의 잔차(residual)는 반올림 오차 범위 안에서 영이었다.

흔한 실수

- (i)의 답에 두 상수 A, B를 그대로 남겨 두고, 그 비만 중요하다는 점을 알아차리지 못한다.
- (ii)에서 x^2y^2의 교차항에 있는 인수 2를 빠뜨려 $3v/x$가 $2v/x$가 되고, 그 결과 잘못된 적분인자를 얻는다.
- 치환으로는 얻을 수 없는 해 $y = 1/x$(또는 (i)의 $y = \frac{2}{3}$)를 놓친다.

STEP 너머

$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ 꼴의 방정식을 리카티 방정식(Riccati equations)이라고 한다. 여기서 쓴 두 기법은 모두 일반적으로 통한다. 치환 $y = -u'/(ru)$는 리카티 방정식을 언제나 선형 이계 방정식으로 바꾼다. 또한 특수해(particular solution) y_1 하나를 알고 있다면, $y = y_1 + 1/v$는 언제나 v에 대한 선형 일계 방정식을 준다. 리카티 방정식과 선형 이계 방정식 사이의 이 연결은 양자역학(quantum mechanics)과 제어 이론(control theory)에서도 다시 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 리카티 방정식에 관한 연습문제가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.