풀이

STEP II 1993, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 적분과 대수적 적분

> **STEP II 1993, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q2

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 코사인의 곱은 적분하기 까다롭지만 합은 쉽게 적분할 수 있으므로, 곱을 합으로 바꾸는 공식(factor formula)을 써서 곱을 합으로 바꾼다. 그러면 모든 것이 한 가지 사실에 달려 있다. $\cos kx$를 한 주기(period) 전체에 걸쳐 적분하면 $k = 0$이 아닌 한 0이 된다는 것이다. 특수한 경우는 정확히 $m - n$ 또는 $m + n$이 0인 경우이다. 소문항 (ii)에서는 제곱근 안을 하나의 분수로 합친 뒤 유리화(rationalise)하는데, 그러면 피적분함수(integrand)가 표준적인 두 부분으로 나뉜다.

풀이

소문항 (i)

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$에 의해

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}[\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)].$$

이다. 따라서 정수 k에 대하여 $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x$를 구하면 된다.

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\sin 2k\pi}{k} = 0, & k \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

여기서 k가 정수이므로 $\sin 2k\pi = 0$임을 이용했다. $k = 0$일 때는 k로 나눌 수 없으므로 이 경우를 따로 다룬다.

? **생각해 보기** 서로 다른 경우는 몇 가지이며, 겹치는 경우가 있는가?

$k = m - n$과 $k = m + n$은 각각 0이거나 0이 아니며, 둘 다 0인 것은 $m = n = 0$일 때뿐이다. 따라서 다음 세 가지 경우가 생긴다.

- $m \neq n$이고 $m \neq -n$, 즉 $|m| \neq |n|$인 경우: 두 적분이 모두 0이 되므로 답은 0이다.
- $m - n, m + n$ 중 정확히 하나가 0, 즉 $|m| = |n| \neq 0$인 경우: 한 항은 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$를, 다른 항은 0을 기여하므로 답은 π이다.
- $m = n = 0$인 경우: 두 항이 모두 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$를 기여한다. (직접 보아도 피적분함수가 1이다.) 답은 2π이다.

정리하면

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & |m| = |n| \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

이다. cos는 우함수(even function)여서 $\cos(-nx) = \cos(nx)$이므로, $m = -n$인 경우는 $m = n$인 경우와 같은 부류에 속한다는 점에 주목하자.

소문항 (ii)

피적분함수 $\sqrt{1 + 1/x} = \sqrt{(x+1)/x}$는 $(x+1)/x \geq 0$일 때, 즉 $x > 0$ 또는 $x \leq -1$일 때만 실수이다. 먼저 $x > 0$인 경우를 다룬다.

$x > 0$인 경우. 근호 안의 분자와 분모에 $x + 1$을 곱하면

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}},$$

이다. 여기서 $(x+1)^2$의 제곱근을 구할 때 $x + 1 > 0$임을 이용했다. 이제 분자의 한 부분이 $x^2 + x$의 도함수(derivative)의 절반이 되도록 분자를 나눈다.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

생각해 보기 $1/\sqrt{x^2+x}$는 어떻게 적분하는가?

완전제곱식으로 고치면(complete the square) $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$이다. 그러면 $u > a > 0$에서 성립하는 표준 결과 $\int (u^2 - a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$에 $u = x + \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$를 적용할 수 있다.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left(x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + \text{const} = \ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right) + \text{const}.$$

첫 번째 부분은 $\int \frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}$이다. 따라서 $x>0$에 대하여

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) + C.$$

이다. $2x+1+2\sqrt{x^2+x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2$이므로, 이것을

$$\sqrt{x(x+1)} + \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + C.$$

로 쓸 수도 있다. 치환(substitution) $x = \sinh^2 t$를 쓰면 이 두 번째 꼴이 바로 나온다. 피적분함수는 $2\cosh^2 t = 1+\cosh 2t$가 되고, 이를 적분하면 $t+\sinh t\cosh t$이다.

$x \le -1$인 경우. 이제 $x+1 \le 0$이므로 $\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1)$이고

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

이다. 같은 방식으로 나눌 수 있지만, 이번에는 $x+\frac{1}{2} < 0$이므로 $|u| > a$에서 성립하는 $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$가 필요하다. $x<-1$에 대하여

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

이다. $\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) = 1$이므로 로그 항을 $+\frac{1}{2}\ln\left|2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right|$로 쓸 수도 있다.

검산

- 소문항 (i): $m=n=1$이면 피적분함수는 $\cos^2 x$이고 그 평균은 $\frac{1}{2}$이므로, 적분값은 예상대로 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$이다. $-6 \le m,n \le 6$인 모든 쌍에 대하여 수치 계산(심프슨 공식(Simpson's rule))을 한 결과가 세 경우로 나눈 공식과 일치했다.
- 소문항 (ii): 답을 미분해 본다. $\sqrt{x^2+x}$의 도함수는 $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$이다. $\frac{1}{2}\ln(\cdots)$의 도함수는 $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$이다. 둘을 더하면 원하는 대로 $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$가 된다.
- 수치적으로, 심프슨 공식으로 계산해도, 공식 $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$로 계산해도 $\int_1^3 \sqrt{1+1/x}\,\mathrm{d}x \approx 2.48547$이다.

흔한 실수

- $m=-n\neq 0$인 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우도 $m=n\neq 0$인 경우와 마찬가지로 π가 된다.

- $k = 0$일 때 $\dfrac{\sin kx}{k}$라고 쓰는 것. 이 경우는 따로 다루어야 한다.
- 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{(x+1)^2} = x + 1$이라고 쓰는 것. 그러면 $x < -1$에서 틀린 답이 나온다.

STEP 너머

소문항 (i)은 함수 $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$가 $[0, 2\pi]$에서 **직교**(orthogonal)한다는 것을 말해 준다. 이것이 푸리에(Fourier) 급수(Fourier series)의 바탕이 되는 사실이다. $f(x) = \sum a_n \cos nx$이면, $\cos mx$를 곱하여 적분할 때 계수 a_m 하나만 골라진다. 적분이 내적(dot product)의 역할을 하는 이 같은 생각은 함수 공간에서의 선형대수(linear algebra)의 많은 부분의 밑바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 직교성을 다루고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 푸리에 급수가 열 방정식(heat equation)을 푸는 데 실제로 쓰이는 모습을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.