풀이

STEP II 1993, 문제 14

역학 • 튀어 오름과 반발계수

STEP II 1993, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q14

핵심 아이디어

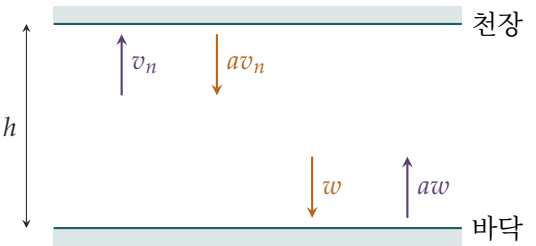
충돌과 충돌 사이에 공은 중력만 받으며 자유롭게 움직이므로, $v^2 = u^2 \pm 2gh$가 바닥과 천장에서의 속력을 이어 주고, 매 충돌마다 속력에 a가 곱해진다. 한 번의 완전한 주기(천장, 바닥, 다시 천장)를 따라가면 천장에서의 운동 에너지(kinetic energy)에 대한 선형 점화식(recurrence relation)을 얻는데, 이는 고정점(fixed point)만큼 평행이동하여 푼다. 공이 n번째로 천장에 닿는 것은 바로 그 에너지가 양수일 때이며, 로그(logarithm)를 취하면 이 조건이 구하는 부등식으로 바뀐다.

풀이

공을 공기 저항(air resistance) 없이 연직으로 움직이는 입자(particle)로 모형화하고, $0 < a < 1$로 둔다(부등식의 분모에 $\ln a$가 있고, $a = 1$이면 공은 천장에 끝없이 부딪힐 것이다). n번째 천장 충돌 직전의 속력을 v_n이라 하고,

$$E_n = \frac{v_n^2}{2gh}, \qquad \text{이므로} \qquad \tfrac{1}{2}mv_n^2 = mgh\,E_n.$$

로 둔다.



첫 번째 천장 충돌

공은 $u^2 = 2kgh$로 바닥을 떠나 중력을 거슬러 높이 h만큼 올라가므로

$$v_1^2 = 2kgh - 2gh = 2gh(k-1), \qquad E_1 = k - 1 > 0,$$

이고, $k > 1$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 공은 적어도 한 번은 반드시 천장에 닿는다.

한 번의 완전한 주기

n번째 천장 충돌 직후 공은 속력 av_n으로 아래로 움직인다(고정된 천장에서의 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)). 공은 높이 h만큼 떨어지므로 속력 w로 바닥에 닿으며, 여기서

$$w^2 = a^2 v_n^2 + 2gh.$$

이다. 공은 속력 aw로 위로 튀어 올라 높이 h만큼 올라간다. 다시 천장에 닿는다면, 그때의 속력은

$$v_{n+1}^2 = a^2 w^2 - 2gh = a^4 v_n^2 + 2gh\,(a^2 - 1).$$

을 만족한다. $2gh$로 나누면

$$E_{n+1} = a^4 E_n + (a^2 - 1).$$

이다. 이 식은 우변이 양수일 때마다 성립한다. 우변이 0이거나 음수이면 공은 다시는 천장에 닿지 못한다.

> **생각해 보기** $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 꼴의 점화식은 어떻게 푸는가?

$E = a^4 E + (a^2 - 1)$을 만족하는 상수해 E를 찾는다:

$$E = \frac{a^2 - 1}{1 - a^4} = \frac{a^2 - 1}{(1 - a^2)(1 + a^2)} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

이 고정점을 빼면 상수항이 없어진다. 즉 $F_n = E_n + \dfrac{1}{1 + a^2}$로 두면 $F_{n+1} = a^4 F_n$이다. 따라서 $F_n = a^{4(n-1)} F_1$이고, $F_1 = (k-1) + \dfrac{1}{1 + a^2}$이므로

$$E_n = a^{4n-4}\left(k - 1 + \frac{1}{a^2 + 1}\right) - \frac{1}{a^2 + 1} = a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}.$$

이다. mgh를 곱하면, n번째 천장 충돌 직전의 운동 에너지는

$$mgh\left(a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}\right),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

천장 충돌 횟수

공이 n번째로 천장에 부딪히려면 천장에 도달할 때 속력이 양수여야 한다. 즉 $E_n > 0$이어야 한다. (공이 천장에 n번째로 부딪힌다면 그 이전의 모든 경우에도 부딪힌 것이므로 위의 식이 적용된다.) $E_n > 0$의 양변에 $a^2 + 1 > 0$을 곱하면

$$a^{4n-4}((k-1)(a^2+1)+1) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^{4n-4}(a^2(k-1)+k) > 1.$$

이다. 양변이 모두 양수이므로 로그를 취할 수 있다:

$$(4n-4)\ln a + \ln[a^2(k-1)+k] > 0.$$

? **생각해 보기** $4\ln a$로 나누면 부등호의 방향은 어떻게 되는가?

$0 < a < 1$이므로 $\ln a < 0$이고, 따라서 $4\ln a$로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다:

$$n - 1 < -\frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}, \qquad \text{즉,} \qquad n < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

그러므로 공이 천장에 N번 부딪힌다면 $n = N$일 때 이 부등식이 성립하고

$$N < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

이다. 특히 천장 충돌 횟수는 이 값 이하이며, 이것이 보여야 할 내용이다. (실제로 E_n은 n에 대해 감소하므로, N은 정확히 이 경계값보다 작은 양의 정수의 개수이다.)

검산

- $n = 1$: 식은 $mgh(k-1)$을 주며, 이는 에너지 보존(conservation of energy)으로 얻는 $\frac{1}{2}m(2kgh) - mgh$와 일치한다.
- n이 클 때: $E_n \to -\frac{1}{1+a^2} < 0$이므로 공은 결국 천장에 닿지 못하게 된다. 매 충돌마다 에너지를 잃으므로 당연히 그래야 한다.
- 수치적으로 $k = 6$, $a = 0.9$, $h = 2\,\mathrm{m}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 단계별 시뮬레이션을 하면 천장에서의 운동 에너지는 98, 60.57, 36.02 J로 식과 일치한다. 공은 천장에 6번 부딪히고, 경계값은 약 6.48이다.

흔한 실수

- 천장과 바닥 **두 곳 모두**에서 속력에 a가 곱해진다는 사실을 잊어, 한 주기마다 a^4 대신 a^2를 얻는 것.
- 부등호의 방향을 바꾸지 않고 $\ln a$로 나누는 것.

- 반발(restitution)을 속력이 아닌 운동 에너지에 적용하는 것: 매 충돌마다 에너지에는 a가 아니라 a^2가 곱해진다.

STEP 너머

점화식 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$는 1계 선형 차분방정식(first-order linear difference equation)이다. 고정점을 빼는 기법은 선형 상미분방정식(ODE)의 특수해(particular integral)를 구하는 방법의 이산 버전이며, 반복 사상(iterated map)과 그 안정성(stability)을 연구할 때 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 에너지 손실을 더 일반적으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.