풀이

STEP II 1993, 문제 13

역학 • 단순 조화 운동

STEP II 1993, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q13

핵심 아이디어

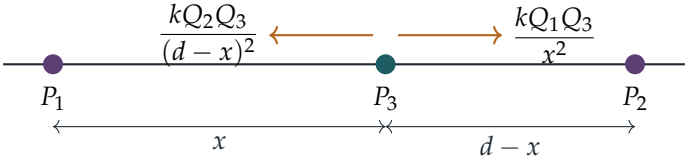
움직이는 구슬에 좌표를 정하고, 구슬에 작용하는 알짜힘(net force)을 적는다. 이 힘은 서로 반대 방향으로 미는 두 역제곱(inverse-square) 척력이다. 평형(equilibrium)은 두 힘이 균형을 이루는 곳이다. 진동을 다루려면 구슬을 작은 y만큼 변위시키고 주어진 근사를 두 힘 모두에 적용한다. 그러면 상수항은 평형 조건에 의해 소거되고, y에 비례하는 복원력(restoring force)만 남는다. 이것이 바로 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 방정식이다.

(문제에서는 P_3이 "P_1과 P_3 사이에서" 움직인다고 되어 있는데, 이는 "P_1과 P_2 사이에서"를 잘못 쓴 것이다.)

풀이

모형. 구슬은 질점(particle)으로 본다. 철사는 매끄럽고 수평이므로 P_3의 무게와 수직항력은 모두 철사에 수직이며, 철사를 따른 운동에는 아무 영향도 주지 않는다. 철사 방향으로 작용하는 힘은 P_3에 작용하는 두 전기적 척력뿐이다(고정된 구슬은 제자리에 붙잡혀 있으므로 그것들에 작용하는 힘은 신경 쓸 필요가 없다).

x를 P_1에서 P_2 쪽으로 잰다. 그러면 P_3은 P_1으로부터 거리 x, P_2로부터 거리 $d-x$에 있고, $0 < x < d$이다.



P_1은 P_3을 P_2 쪽(양의 방향)으로 밀고 P_2는 반대로 밀어내므로, 철사 방향으로 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 적용하면 다음을 얻는다.

$$m\ddot{x} = \frac{kQ_1Q_3}{x^2} - \frac{kQ_2Q_3}{(d-x)^2}. \qquad (*)$$

평형 위치

평형에서는 $x = a$이고 $(*)$의 우변이 0이 된다. k와 Q_3은 양수이므로 kQ_3으로 나눌 수 있다.

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{(d-a)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d-a}{a}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

a와 $d-a$는 모두 양수이므로(구슬이 고정된 두 구슬 사이에 있으므로) 양의 제곱근을 택한다.

$$\frac{d-a}{a} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{Q_1}\,(d-a) = \sqrt{Q_2}\,a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}},$$

이로써 원하는 결과를 얻는다. $S = \sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}$, $b = d - a$로 두면 편리하다. 그러면

$$a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{S}, \qquad b = \frac{d\sqrt{Q_2}}{S}.$$

구슬이 더 약한 전하에 더 가까이 놓인다는 점에 주목하자. 이는 직관과도 맞는다.

작은 진동

y가 작을 때 $x = a + y$로 두면 $d - x = b - y$이고 $\ddot{x} = \ddot{y}$이다. 주어진 근사(그리고 같은 근사에서 y를 $-y$로, a를 b로 바꾼 것)를 쓰면

$$\frac{1}{(a+y)^2} \approx \frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}, \qquad \frac{1}{(b-y)^2} \approx \frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}.$$

이를 $(*)$에 대입하면

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &\approx kQ_3\left[Q_1\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}\right) - Q_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}\right)\right] \\ &= kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2}\right) - 2kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3}\right)y. \end{aligned}$$

생각해 보기 y를 포함하지 않는 항들은 어떻게 되는가?

그 항들은 정확히 평형 조건이므로 $\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2} = 0$이 되어 소거된다. 평형점 주위에서 전개하면 항상 이런 일이 일어난다. 0차 항의 힘은 정의에 의해 0이기 때문이다.

이제 a와 b의 식을 이용하여 y의 계수를 정리한다.

$$\frac{Q_1}{a^3} = \frac{Q_1S^3}{d^3Q_1^{3/2}} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_1}}, \qquad \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_2}},$$

따라서

$$\frac{Q_1}{a^3}+\frac{Q_2}{b^3}=\frac{S^3}{d^3}\cdot\frac{\sqrt{Q_2}+\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1Q_2}}=\frac{S^4}{d^3\sqrt{Q_1Q_2}}.$$

그러므로

$$\ddot{y}\approx-\omega^2 y,\qquad \omega^2=\frac{2kQ_3S^4}{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}>0.$$

이것은 단순 조화 운동의 방정식이므로, 변위가 작을 때 P_3은 $x=a$를 중심으로 근사적인 단순 조화 운동을 한다. ($y=y_0$에서 정지 상태로 놓으면 운동은 $y\approx y_0\cos\omega t$이다.) 주기(period)는

$$\begin{aligned}T=\frac{2\pi}{\omega}&=2\pi\sqrt{\frac{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3S^4}}=\frac{2\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}}\\&=\frac{\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{4md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}}=\frac{\pi d}{(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^2}\sqrt{\frac{2md\sqrt{Q_1Q_2}}{kQ_3}},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- **대칭성:** $Q_1=Q_2$이면 $a=d/2$, 즉 중점이 되어야 하며 실제로 그렇다. 주기 공식도 Q_1과 Q_2에 대해 대칭인데, 이 역시 당연하다(두 전하를 바꾸는 것은 그림을 좌우로 뒤집는 것일 뿐이다).
- **차원(dimensions):** kQQ'/r^2은 힘이므로 $kQ_3\sqrt{Q_1Q_2}$의 차원은 힘 $\times$ 길이^{2}이다. 그러면 $md\sqrt{Q_1Q_2}/(kQ_3)\cdot d^2/(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^4$의 차원은 질량 $\times$ 길이/힘 $=$ 시간^{2}이다. 올바르다.
- **수치:** $Q_1=4$, $Q_2=1$, $d=3$, $k=Q_3=m=1$로 두면 $a=2$(확인: $4/2^2=1/1^2$)이고 $T=2\pi/\sqrt{3}\approx 3.628$이다. 상수를 무작위로 여러 번 골라 아주 작은 변위에서 $(*)$을 수치적으로 적분해 보면, 주기 공식이 10^4분의 1보다 좋은 정확도로 재현된다.

흔한 실수

- 두 힘 가운데 하나만 전개하는 것: 두 힘 모두 y에 의존하며, 둘 다 (같은 부호로) 복원력에 기여한다.
- $1/(b-y)^2$에서 y 항의 부호를 틀리는 것: 주어진 근사에서 y를 $-y$로 바꾸면 $+2y/b^3$이 된다.
- 평형 조건에서 음의 제곱근을 택하는 것: 그러면 구슬이 선분 P_1P_2 바깥에 놓이게 된다.

STEP 너머

우리가 한 일은 **선형화**(*linearisation*)이다. 퍼텐셜(potential) $V(x)$의 안정 평형점 근처에서 운동은 근사적으로 $\omega^2 = V''(a)/m$인 단순 조화 운동이다. 여기서는 $V = kQ_3\left(Q_1/x + Q_2/(d-x)\right)$이며, $V''(a)$가 같은 ω^2을 준다는 것을 확인할 수 있다. 이 아이디어를 여러 좌표로 확장하면 진동의 정규 모드(normal modes)로 이어지는데, 이는 대학 1학년 동역학의 핵심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 평형 주위의 작은 진동을 명쾌하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.