풀이

# STEP II 1993, 문제 12

역학 • 마찰과 강체

> **STEP II 1993, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q12

## 핵심 아이디어

구는 벽과 평면 사이에 끼어 있으므로, 둘 중 하나와의 접촉을 잃지 않고서는 움직여 빠져나갈 수 없다. 두 접점에서 동시에 미끄러진다면 구의 중심은 제자리에 있고 구는 단지 중심을 축으로 돈다. 구가 어느 쪽으로 돌지를 알아내면 각 마찰력(friction)이 어느 방향으로 작용하는지 알 수 있다. 그다음은 미지수 $N_1$, $N_2$, $m$에 대한 세 방정식(두 방향의 힘의 분해와 하나의 모멘트 방정식)을 푸는 일이다. 두 번째 부분에서는 모멘트를 잡을 점을 잘 고르면 답이 한 줄 만에 나온다.

## 풀이

### 모형과 마찰력의 방향

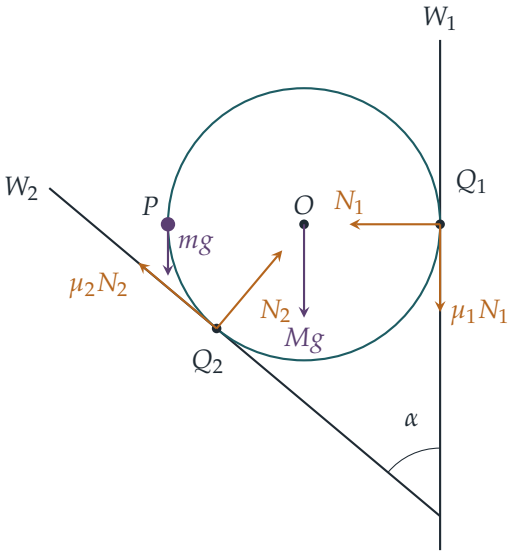
구는 균일한 강체(rigid body) 구로, 입자는 $P$에 고정된 질점으로 모형화한다. $Q_1$과 $Q_2$에서의 접촉은 거칠다. 수직항력(normal reaction)을 각각 $N_1$(수평 방향, 벽에서 멀어지는 쪽)과 $N_2$(평면에 수직, 중심 $O$를 지남)라 하자.

$PQ_1$이 수평인 지름이므로, 입자는 $O$로부터 벽의 반대쪽으로 수평 거리 $r$만큼 떨어진 곳에 매달려 있다. 따라서 입자의 무게는 $O$에 대하여 $mgr$의 모멘트(moment)를 가지며, 이 모멘트는 $P$가 내려가는 쪽으로 구를 돌리려 한다. 접점에서의 힘들이 이를 상쇄해야 한다.

? **생각해 보기** 각 접점에서 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

구가 두 점 모두에서 미끄러진다면 두 면과의 접촉이 유지되므로 $O$는 고정되고, 구는 $P$가 떨어지는 방향으로 $O$를 중심으로 회전한다. 그러면 $P$의 반대편 점인 $Q_1$은 벽을 따라 **위로** 움직이고, $Q_2$는 평면을 따라 모서리 쪽으로 **아래로** 움직인다. 마찰력은 미끄러짐에 반대하

므로 $Q_1$에서는 벽을 따라 **아래로**, $Q_2$에서는 평면을 따라 **위로** 작용한다. 두 점 모두에서 막 미끄러지려는 참이므로 두 곳 모두 최대 마찰(limiting friction) 상태이다. 즉 $F_1 = \mu_1 N_1$, $F_2 = \mu_2 N_2$이다. 두 마찰력의 $O$에 대한 모멘트는 모두 입자의 모멘트와 반대 방향이며, 마땅히 그래야 한다.




**두 접점 모두에서 미끄러지는 경우**

평면은 연직 방향과 각 $\alpha$를 이루므로, 평면의 법선은 수평 방향과 각 $\alpha$를 이룬다. 따라서 $N_2$는 벽 쪽으로 $N_2 \cos\alpha$, 위쪽으로 $N_2 \sin\alpha$의 성분을 가지고, 평면을 따라 위로 작용하는 마찰력 $\mu_2 N_2$는 벽에서 멀어지는 쪽으로 $\mu_2 N_2 \sin\alpha$, 위쪽으로 $\mu_2 N_2 \cos\alpha$의 성분을 가진다.

수평 방향으로 분해(resolving)하면

$$N_1 = N_2 \cos\alpha - \mu_2 N_2 \sin\alpha = N_2(\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha). \tag{1}$$

연직 방향으로 분해하면

$$N_2 \sin\alpha + \mu_2 N_2 \cos\alpha - \mu_1 N_1 = (M+m)g. \tag{2}$$

$O$에 대한 모멘트를 잡자. 두 수직항력은 모두 $O$를 지나고, $Mg$도 마찬가지이다. 두 마찰력은 접선을 따라 $O$로부터 거리 $r$인 곳에 작용한다. 따라서

$$mgr = \mu_1 N_1 r + \mu_2 N_2 r \quad \Longrightarrow \quad mg = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2. \tag{3}$$

(1)을 (3)과 (2)에 대입하면

$$mg = N_2(\mu_2 + \mu_1 \cos\alpha - \mu_1\mu_2 \sin\alpha),$$
$$(M+m)g = N_2(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha - \mu_1 \cos\alpha + \mu_1\mu_2 \sin\alpha).$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면

$$\begin{aligned} Mg &= N_2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - 2\mu_1\cos\alpha + 2\mu_1\mu_2\sin\alpha - \mu_2) \\ &= N_2((2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2). \end{aligned}$$

$mg$에 대한 식을 이 식으로 나누면 $N_2$와 $g$가 소거되어

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha}{(2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2} M,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

이것이 물리적으로 의미가 있으려면 $N_1 > 0$이어야 하고, (1)에 의해 이는 $\mu_2 < \cot\alpha$를 뜻한다. $\mu_2$가 그보다 크면 $Q_2$에서의 마찰력이 구를 벽에서 떼어 내게 되며, 이것이 마지막 부분의 상황이다.

### $Q_2$를 중심으로 구르는 경우

이제 구는 $Q_2$에서 미끄러지지 않는다. 대신 $Q_2$를 중심으로 막 돌려는(평면을 따라 위로 구르려는) 참이므로, 중심이 벽에서 멀어지고 $Q_1$에서의 접촉이 막 끊어지려 한다. 구르기 시작하는 순간 $N_1 = 0$이고, 따라서 $Q_1$에서의 마찰력도 0이다.

**생각해 보기** 이제 미지수가 된 $Q_2$에서의 마찰력은 어떻게 처리하는가?

$Q_2$에 대한 모멘트를 잡으면 $Q_2$에서의 수직항력과 마찰력이 모두 빠진다. 그러면 두 무게만 남는다. 수평 거리를 $Q_2$로부터 잰다. $OQ_2$는 평면에 수직이므로 수평 방향과 각 $\alpha$를 이루고, 따라서 $O$는 $Q_2$로부터 벽 쪽으로 수평 거리 $r\cos\alpha$에 있다. 입자는 $O$보다 벽에서 먼 쪽으로 $r$만큼 더 떨어져 있으므로, $Q_2$로부터 반대쪽으로 수평 거리 $r - r\cos\alpha$에 있다. 모멘트가 평형을 이루려면

$$Mg\,r\cos\alpha = mg\,r(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{M\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{M}{\sec\alpha - 1},$$

이며, 마지막 등호는 분자와 분모를 $\cos\alpha$로 나누어 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다.

## 검산

- 두 답은 두 경우의 경계, 즉 $N_1 = 0$인 $\mu_2 = \cot\alpha$에서 일치해야 한다. 첫 번째 공식에 $\mu_2 = \cos\alpha/\sin\alpha$를 대입하면, $\mu_1$의 값에 관계없이 분자는 $\cot\alpha$, 분모는 $(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$가 된다. 따라서 $m = M\cos\alpha/(1-\cos\alpha)$이고, 이는 두 번째 답과 일치한다.
- $\alpha = 60^\circ$이면 두 번째 답은 $m = M$을 준다. $\alpha = 60^\circ$, $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.3$, $M = 1$이면 첫 번째 답은 $m \approx 0.561$을 준다. 이 값들과 무작위로 고른 2000가지 경우에 대해 컴퓨터로 힘과 모멘트의 평형을 확인하였다.

- 두 접촉면이 모두 매끄럽다면($\mu_1 = \mu_2 = 0$) 첫 번째 공식은 $m = 0$을 준다. 예상대로, 입자의 모멘트에 저항할 수 있는 것이 아무것도 없다.

## 흔한 실수

- 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것. 먼저 구가 어느 쪽으로 돌지 정한 다음, 각 접점이 어느 쪽으로 미끄러질지 정하라.
- 두 수직항력이 모두 중심을 지나므로 $O$에 대한 모멘트 방정식에 나타나지 않는다는 사실을 잊는 것.
- 마지막 부분에서 벽의 마찰력을 그대로 두는 것. 구가 막 벽에서 떨어지려 하면 $N_1 = 0$이므로 그곳의 마찰력은 0이다.

## STEP 너머

미끄러지거나 구를 수 있는 접점이 여러 개 있는 이런 문제는 구속 조건이 있는 강체 역학의 출발점이다. 각 접점은 부등식($|F| \leq \mu N, N \geq 0$)을 하나씩 주며, 그중 어느 것이 등호로 성립하는지 알아내야 한다. 같은 경우 분석이 로봇 공학에도 등장하는데, 로봇 손이 물체를 잡을 수 있는지를 이것으로 판단한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 정역학과 강체의 회전을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.