풀이

STEP II 1993, 문제 11

역학 • 속도의 제곱에 비례하는 저항을 받는 운동

STEP II 1993, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

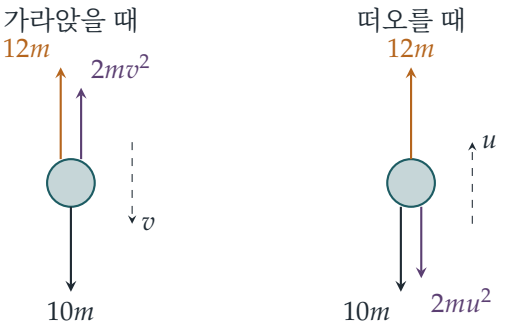
step.maths.org/questions/93-s2-q11

핵심 아이디어

물체가 액체 속에 들어가면 부력(buoyancy)이 중력보다 크므로, v^2에 비례하는 저항(resistance) 외에 위쪽으로 향하는 일정한 알짜힘이 작용한다. 저항은 항상 운동을 방해하는 방향으로 작용하므로 물체가 방향을 바꾸면 저항의 방향도 뒤집힌다. 따라서 가라앉는 단계와 떠오르는 단계에는 각각 따로 운동 방정식(equation of motion)을 세워야 한다. 두 방정식 모두 변수분리(separation of variables)가 깔끔하게 된다. 시간을 구할 때는 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를, 거리를 구할 때는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 사용한다.

풀이

물체를 입자(particle)로 모형화한다. 액체 속에서 물체의 무게는 아래쪽으로 $10m$ N이고 부력은 위쪽으로 $\frac{6}{5}\times 10m = 12m$ N이므로, 둘을 합하면 물체가 어느 방향으로 움직이든 위쪽으로 $2m$ N의 알짜힘이 된다. 저항 $2mv^2$ N은 속도의 반대 방향으로 작용한다.



가라앉는 단계

아래쪽을 양의 방향으로 잡고, x를 수면 아래의 깊이, v를 아래쪽으로의 속력이라 하자. 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)에 의해

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10m - 12m - 2mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2(1+v^2).$$

물체가 속력 $V > 0$으로 액체에 들어간다고 하자. 변수를 분리하여, 들어가는 순간($t = 0$, $v = V$)부터 가라앉기를 멈추는 순간($t = T_1$, $v = 0$)까지 적분하면

$$\int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^{T_1} \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}\arctan V.$$

모든 유한한 V에 대하여 $\arctan V < \frac{\pi}{2}$이므로 $T_1 < \frac{1}{4}\pi$이다. 즉 물체를 아무리 빠르게 떨어뜨려도, 물체는 들어간 뒤 $\frac{1}{4}\pi$초가 지나기 전에 가라앉기를 멈춘다. (또한 내내 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \le -2$이므로 물체는 확실히 멈춘다.)

$V = 1$일 때 도달하는 깊이

이제 $T_1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$이다. 깊이를 구하기 위해 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2(1+v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_1^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^D \mathrm{d}x,$$

이므로 $-\frac{1}{2}\ln 2 = -2D$이고, 최대 깊이는

$$D = \tfrac{1}{4}\ln 2 \text{ 미터},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

떠오르는 단계

깊이 D에서 물체는 순간적으로 정지하지만, 위쪽으로 $2m$ N의 알짜힘은 여전히 작용하므로 물체는 떠오르기 시작한다. 이제 저항은 아래쪽으로 작용한다. 위쪽을 양의 방향으로 잡고, y를 최저점에서부터 올라간 높이, u를 위쪽으로의 속력이라 하면

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 12m - 10m - 2mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2).$$

생각해 보기 가라앉을 때의 방정식을 그대로 두고 v가 음수가 되도록 하면 왜 안 될까?

항 $-2mv^2$는 v의 부호와 관계없이 항상 위쪽을 향한다. 물체가 떠오르기 시작하면 저항은 아래쪽을 향해야 하므로 방정식이 바뀐다. (하나의 방정식으로 쓰려면 $-2mv|v|$가 필요하다.) 또한 올라가는 동안 내내 $u < 1$임에 주목하자. u는 0에서 시작하고 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$은 $u < 1$인

동안에만 성립하므로, u는 종단 속력(terminal speed) 1 ms^{-1}에 가까워질 수만 있다. 덕분에 아래에서 $1-u^2$는 항상 양수이다.

수면에서의 속력. $u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2(1-u^2)$를 이용하여 $y=0$, $u=0$부터 $y=D$, $u=U$까지 적분하면

$$\int_0^U \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = 2\int_0^D \mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2}\ln(1-U^2) = 2D = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

따라서 $1-U^2 = \frac{1}{2}$이고, 물체는 속력 $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ms^{-1}로 수면에 돌아온다.

떠오르는 데 걸리는 시간. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2)$에 부분분수(partial fractions) $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1-u}\right)$를 이용하면

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_0^U \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{4}\Big[\ln\frac{1+u}{1-u}\Big]_0^U = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

이다. 마지막 단계에서는 분자와 분모에 $\sqrt{2}$를 곱했다.

전체 시간. 물체는 수영장에 들어간 뒤

$$T_1 + T_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \text{ 초}$$

가 지나서 다시 수면에 도달한다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$이므로 떠오르는 시간은 $T_2 = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.4407\,\mathrm{s}$이고, 전체 시간은 $\approx 0.3927 + 0.4407 = 0.8334\,\mathrm{s}$이다.
- 운동을 수치적으로 단계별 계산하면(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, 저항은 $-2v|v|$로 씀) 멈추는 시간 0.39270 s, 깊이 0.17329 m $= \frac{1}{4}\ln 2$, 돌아올 때의 속력 0.70711 ms^{-1}, 돌아오는 시각 0.83339 s를 얻으며, 모두 일치한다.
- 돌아올 때의 속력은 들어갈 때의 속력보다 작은데, 당연히 그래야 한다. 내려갈 때와 올라올 때 모두 저항이 음의 일(work)을 하기 때문이다.

흔한 실수

- 다시 올라올 때에도 저항을 위쪽으로 두는 것. 그러면 위쪽 알짜힘이 $2m + 2mu^2$이 되어 훨씬 빠르게 떠오르게 된다.

- 부력이 중력보다 크다는 것을 잊어서, 알짜힘을 $-2m$(아래쪽이 양의 방향)가 아니라 $+2m$로 쓰는 것.
- 깊이를 구할 때 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를, 시간을 구할 때 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 사용하여 적분에서 막히는 것.

STEP 너머

이차 항력(quadratic drag)은 운동 방정식을 비선형(nonlinear)으로 만들지만 여전히 변수분리가 가능하다. 그래서 내려갈 때는 arctan이, 올라갈 때는 $\tanh^{-1}$이 나타난다(실제로 $T_2 = \frac{1}{2}\tanh^{-1} U$이다). 올라가는 운동은 종단 속력 $1\ \mathrm{ms}^{-1}$에 가까워지는데, 이 속력에서 항력이 위쪽 알짜힘과 균형을 이룬다. 대학 1학년 과정에서는 이런 모형을 체계적으로 다루며, $\dot{u} = 2(1-u^2)$ 같은 방정식의 위상선(phase line) 그림도 함께 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘을 다루고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 변수분리형 방정식과 자율(autonomous) 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.