풀이

# STEP II 1993, 문제 10

순수수학 • 이차형식과 이차곡선

> **STEP II 1993, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q10

## 핵심 아이디어

$x$와 $y$에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 복잡한 데에는 두 가지 이유가 있다. 하나는 $xy$ 교차항이고, 다른 하나는 일차항이다. 행렬 $\mathbf{P}$는 첫 번째 문제를 해결한다. $\mathbf{PAP}$가 대각행렬(diagonal matrix)이기 때문이다. 평행이동 $\mathbf{a}$는 두 번째 문제를 해결한다. 원점을 원뿔곡선(conic)의 중심으로 옮기도록 $\mathbf{a}$를 고르면 $\mathbf{x}_1$에 대한 일차항이 모두 소거된다. 남는 것은 순수한 "제곱의 합 = 상수" 꼴이다.

## 풀이

### 대각화하기

먼저

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix},$$

이므로

$$\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

이고, 요구한 대로 대각행렬이다. 또한 $\mathbf{P}$는 대칭행렬(symmetric matrix)이므로 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$임에 주목하자. 이 사실은 곧 쓰인다.

### 대입하기

$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$로 놓자. 그러면 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}$이고,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

가운데 두 항이 같은 까닭은 각각이 $1 \times 1$ 행렬이어서 자기 자신의 전치(transpose)와 같기 때문이다. 실제로 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{P}$가 대칭이라는 사실을 쓰면 $(\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$이다. 또 $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$이다. 따라서 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}})\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11) = 0.$$

**생각해 보기** "적절한 벡터 $\mathbf{a}$"는 무슨 일을 해야 하는가?

목표인 $3x_1^2 - y_1^2 = c$에는 $x_1$이나 $y_1$만 있는 항이 없으므로 가운데 괄호가 사라져야 한다. $\mathbf{A}$가 대칭이므로 $2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathrm{T}}$이고, 따라서 다음이 필요하다.

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

여기서 $\det \mathbf{A} = -11 - 64 = -75 \neq 0$이므로 해는 정확히 하나이다.

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} -75 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(확인: $\mathbf{A}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1-8 \\ 8-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$.)

### 상수항

이 $\mathbf{a}$에 대하여 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{b}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$이므로 상수항은

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11 = \tfrac{1}{2}(18 - 6) - 11 = -5.$$

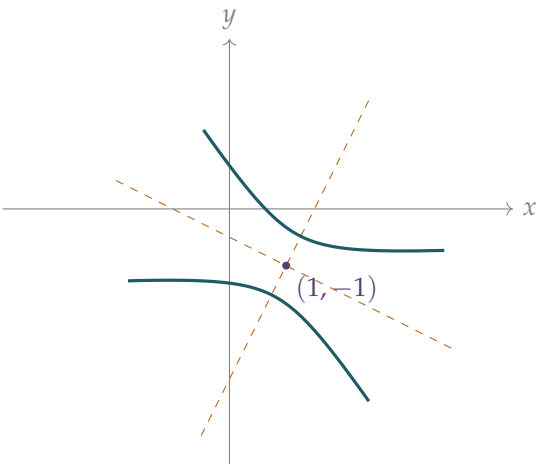
이차항은

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 75x_1^2 - 25y_1^2.$$

따라서 방정식은 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5 = 0$이 된다. 25로 나누면

$$3x_1^2 - y_1^2 = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{따라서} c = \tfrac{1}{5}.$$

대입을 풀어 쓰면 $x = x_1 + 2y_1 + 1$, $y = 2x_1 - y_1 - 1$이다. 원래 방정식은 $-x^2 + 16xy + 11y^2 + 18x + 6y - 11 = 0$이므로, 이 곡선은 중심이 $(1, -1)$인 쌍곡선(hyperbola)이다. $\mathbf{P}$의 열 $(1, 2)$와 $(2, -1)$은 서로 수직이므로 쌍곡선의 대칭축(axes of symmetry)을 준다.




점선은 방향이 $(1,2)$와 $(2,-1)$인 대칭축이다.

**?** **생각해 보기** **P**는 왜 회전(rotation)이 아닌가?

열들은 서로 수직이지만 각각의 길이가 $\sqrt{5}$이므로, $\mathbf{P}^2 = 5\mathbf{I}$이고 **I**가 아니다. 그래서 **PAP**의 대각성분이 75와 $-25$인 것이다. 이 값들은 **A**의 고유값(eigenvalue) 15와 $-5$의 5배이다. 여기서는 이 배율이 문제가 되지 않는데, 이차 부분에 5를 곱할 뿐이기 때문이다.

## 검산

- **A**의 대각합(trace)과 행렬식(determinant)은 10과 $-75$이므로 고유값은 15와 $-5$이다. 이는 $75/5$, $-25/5$와 일치한다.
- $x_1 = y_1 = 0$으로 놓자. 그러면 $(x,y) = (1,-1)$이고 원래 좌변은 $-1-16+11+18-6-11 = -5$로, $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5$와 일치한다.
- $x_1 = 1, y_1 = 1$로 놓자. 그러면 $(x,y) = (4,0)$이고 $-16+72-11 = 45 = 75-25-5$이다.

또한 항등식 좌변 $= 25\left(3x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{5}\right)$이 무작위로 고른 유리수 점 1000개에서 정확히 성립함을 확인하였다.

## 흔한 실수

- 교차항 $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{PA}\mathbf{a}$와 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{AP}\mathbf{x}_1$이 같다는 사실을 잊어 인수 2를 놓치고 $\mathbf{Aa} = -\mathbf{b}$를 얻는 실수.
- $75x_1^2 - 25y_1^2 = 5$에서 멈추고, 요구된 꼴에 맞추어 양변을 나누지 않은 채 $c = 5$라고 답

하는 실수.

## STEP 너머

이것은 주축 정리(principal axes theorem)의 축소판이다. 모든 실대칭행렬은 직교행렬(orthogonal matrix)(여기서는 $\mathbf{P}/\sqrt{5}$)로 대각화할 수 있다. 따라서 모든 원뿔곡선, 그리고 3차원의 모든 이차곡면(quadric surface)은 회전(또는 반사(reflection))과 평행이동(translation)으로 표준형으로 만들 수 있다. 같은 아이디어로 헤세 행렬(Hessian matrix)을 통해 다변수 함수의 정류점(stationary point)을 분류한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에는 대칭행렬과 양의 정부호성(positive definiteness)을 다룬 좋은 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.