풀이

STEP II 1993, 문제 1

순수수학 • 조합 게임의 전략

> **STEP II 1993, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q1

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 세기 사실에 달려 있다. 두 사람 모두 나누어 배치할 수 있는 양이 정확히 9이므로, 베티가 모든 전장에서 애덤과 같거나 더 많으면서 한 전장에서는 확실히 이길 수는 없다. 그렇게 하려면 적어도 $9+1$이 필요하기 때문이다. 따라서 베티가 이길 때는 언제나 정확히 두 전장에서 이기고 나머지 한 전장에서 진다. 이 사실을 알고 나면 첫 번째 부분은 정해진 처방대로 풀리고, 두 순서쌍(triple)에 관한 부분은 짧은 경우 나누기(case analysis)가 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 "베티가 전장 i에서 이긴다"는 것은 $b_i > a_i$를 뜻하고, "애덤이 전장 i에서 이긴다"는 것은 $a_i > b_i$를 뜻하며, $a_i = b_i$인 전장은 비긴 것이다.

보조정리(lemma): 베티가 이기는 방법

베티의 순서쌍이 애덤의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)을 이긴다고 하자. 여기서 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이다.

- 베티는 세 전장 모두에서 이길 수 없다. 그러려면 각 i에 대하여 $b_i \geq a_i + 1$이어야 하므로 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 12$가 되기 때문이다.
- 베티가 정확히 한 전장에서만 이긴다고 하자. 베티가 애덤보다 점수가 많으므로 애덤의 점수는 0이고, 따라서 나머지 두 전장은 비기거나 베티가 이긴다. 그러면 모든 i에 대하여 $b_i \geq a_i$이고 적어도 한 번은 등호가 성립하지 않으므로 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 9 + 1 = 10$이다. 이는 불가능하다.

베티는 애덤보다 점수가 많으므로 적어도 한 점은 얻는다. 따라서 베티는 **정확히 두** 전장에서 이긴다. 그러므로 베티가 (a_1, a_2, a_3)을 이길 필요충분조건은 어떤 두 전장 i, j에 대하여

$$b_i \geq a_i + 1, \qquad b_j \geq a_j + 1,$$

이 성립하고 나머지 전장 k에서 지는 것이다. 전장 k에서 지는 것은 저절로 성립한다는 점에 주목하자. $b_k = 9 - b_i - b_j \leq 9 - a_i - a_j - 2 = a_k - 2$이기 때문이다.

베티는 언제나 이길 수 있다

$a_1 \geq a_2 \geq a_3$이 되도록 전장에 번호를 붙이자. 그러면 $3a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 = 9$이므로 $a_1 \geq 3$이다. 베티는 애덤이 가장 강한 전장을 포기하고, 나머지 두 전장에서 애덤보다 하나씩 더 많이 배치한다.

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - 2,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1).$$

이들은 합이 9인 음이 아닌 정수이다($a_1 - 2 \geq 1$이므로). $a_1 - 2 < a_1$이므로 베티는 전장 2와 3에서 이기고 전장 1에서 진다. 베티는 2점, 애덤은 1점을 얻으므로 베티가 이긴다.

애덤은 자신이 절대 이기지 못하도록 할 수 있다

$(a_1, a_2, a_3) = (9, 0, 0)$으로 잡자. $b_2, b_3 \geq 0$이므로 애덤은 전장 2나 3에서 점수를 얻을 수 없다. 따라서 애덤은 많아야 한 점을 얻으며, 그것도 전장 1에서 이길 때뿐이고, 이는 $b_1 \leq 8$을 뜻한다. 이 경우 $b_2 + b_3 = 9 - b_1 \geq 1$이므로 베티는 전장 2 또는 전장 3에 양수만큼 배치하여 적어도 한 점을 얻는다. 애덤의 점수는 0이거나, 1이면서 베티가 적어도 1점을 얻는다. 어느 경우에도 애덤은 베티보다 점수가 많지 않으므로, 베티가 무엇을 하든 애덤은 절대 이기지 못한다.

(전수 조사(brute force)를 해 보면 이 성질을 갖는 순서쌍은 $(9, 0, 0)$과 그 순서를 바꾼 것들뿐임을 알 수 있다. 다른 순서쌍에 대해서는 베티가 어리석은 선택을 하여 애덤에게 승리를 내주는 경우가 있다.)

두 순서쌍: $(5, 3, 1)$과 $(3, 1, 5)$

어떤 순서쌍 (b_1, b_2, b_3)도 두 순서쌍을 모두 이길 수 없음을 보여야 한다. 보조정리에 의하여 베티는 각 순서쌍에 대해 두 전장에서 이겨야 한다.

$(5, 3, 1)$**에 대하여.** 전장 1과 2에서 이기려면 $6 + 4 = 10 > 9$가 필요하므로 불가능하다. 따라서 베티는 전장 3과 함께 전장 1 또는 전장 2에서 이겨야 한다.

$$b_3 \geq 2 \quad \text{그리고} \quad (b_1 \geq 6 \ \text{또는} \ b_2 \geq 4). \tag{A}$$

$(3, 1, 5)$**에 대하여.** 전장 1과 3에서 이기려면 $4 + 6 = 10 > 9$가 필요하므로 불가능하다. 따

라서 베티는 전장 2와 함께 전장 1 또는 전장 3에서 이겨야 한다.

$$b_2 \geq 2 \quad \text{그리고} \quad (b_1 \geq 4 \text{ 또는 } b_3 \geq 6). \tag{B}$$

생각해 보기 두 조건 모두 전장을 고르는 선택을 포함한다. 어떤 경우도 빠뜨리지 않고 이 둘을 어떻게 결합할 수 있을까?

(B)의 두 번째 선택에 따라 경우를 나누자.

- $b_3 \geq 6$이면 $b_1 + b_2 \leq 3$이므로 $b_1 \geq 6$도 $b_2 \geq 4$도 성립할 수 없고, 이는 (A)에 모순이다.
- $b_1 \geq 4$이면, (B)의 $b_2 \geq 2$와 (A)의 $b_3 \geq 2$에 (A)의 선택지를 더하여

  $$b_1 + b_2 + b_3 \geq 6 + 2 + 2 = 10 \qquad \text{또는} \qquad b_1 + b_2 + b_3 \geq 4 + 4 + 2 = 10.$$

  을 얻는다. 합이 9이므로 둘 다 불가능하다.

모든 경우가 모순에 이르므로, 어떤 순서쌍 하나도 $(5,3,1)$과 $(3,1,5)$를 모두 이길 수 없다. 따라서 요구한 대로 애덤은 이 두 순서쌍으로 이긴다.

검산

순서쌍은 $\binom{11}{2} = 55$개뿐이므로 모든 것을 전수 조사로 확인할 수 있다. 컴퓨터로 확인하면 애덤의 55개 순서쌍 모두가 위의 베티의 처방에 지고, 이기는 모든 응수는 정확히 두 전장에서 이긴다. 또한 $(5,3,1)$을 이기는 순서쌍 13개와 $(3,1,5)$를 이기는 순서쌍 13개를 나열해 보면, 두 목록에 공통인 순서쌍은 없다. 구체적인 예로, $(4,2,3)$은 $(3,1,5)$를 2–1로 이기지만, $(5,3,1)$에 대해서는 전장 3에서만 이기고 전장 1과 2에서 지므로 1–2로 진다.

흔한 실수

- 애덤의 "절대 이기지 않는" 순서쌍으로 $(3,3,3)$을 시도하는 것. 베티가 $(2,2,5)$를 내면 1–2로 지므로, 이 순서쌍으로 애덤은 이길 **수 있다**.
- 베티가 한 전장에서만 이겨서 승리하려면 애덤이 한 점도 얻지 못해야 한다는 점을 잊고, 합이 9라는 사실로 그 경우를 배제하지 않는 것.
- 두 순서쌍에 관한 부분에서 **어떤** 응수도 통하지 않음을 증명하는 대신 $(6,0,3)$이나 $(0,2,7)$ 같은 자연스러운 응수 몇 개만 확인하는 것.

STEP 너머

블로토 대령(Colonel Blotto) 게임은 게임 이론(game theory)의 고전이다. 베티는 모든 정보를 알고 나중에 두므로 언제나 이기며, 따라서 흥미로운 형태는 두 사람이 동시에 두는 경우이다. 이때는 보통 최선의 순수 전략(pure strategy)이 존재하지 않고, 해는 **혼합 전략**(*mixed strategy*), 즉 순서쌍들 위의 확률분포(probability distribution)가 된다. 이러한 해의 존재는 폰 노이만(von Neumann)의 최소최대 정리(minimax theorem)가 보장한다. 이 문제의 두 순서쌍 변형은 그 방향으로 나아가는 첫걸음이다. 애덤의 최선의 방어는 여러 순서쌍에 선택을 분산하는 것이기 때문이다. 같은 정신의 문제들은 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 보라. 혼합 전략을 뒷받침하는 확률 도구는 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)을 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.