풀이

STEP I 1993, 문제 9

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP I 1993, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q9

핵심 아이디어

이것은 혼합 문제(mixing problem)이다. 통 안에 있는 A의 양의 변화율은 (들어오는 비율)에서 (나가는 비율)을 뺀 것이고, 혼합이 빠르게 일어나므로 나가는 액체의 농도는 통 안의 농도와 같다. 가장 먼저 알아차려야 할 점은 각 통의 전체 부피가 결코 변하지 않는다는 것이다. 따라서 농도는 단순히 "A의 양을 상수로 나눈 것"이 된다. 그러면 각 통마다 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)이 하나씩 나오고, 첫 번째 통에서 나오는 양이 두 번째 통의 강제항(forcing term)이 된다.

풀이

첫 번째 통

첫 번째 통에는 액체가 전체적으로 초당 $a + (b - a) = b$리터의 비율로 들어오고 초당 b리터의 비율로 나간다. 따라서 모든 $t \geq 0$에 대하여 부피는 처음 값인 K리터로 유지된다.

혼합이 빠르게 일어나므로 시각 t에서 통 안의 내용물은 균일하고, 액체 중 화학물질 A가 차지하는 비율은 $V(t)/K$이다. 짧은 시간 δt 동안 A가 $a\,\delta t$리터 들어오고 혼합물이 $b\,\delta t$리터 나가는데, 그중 $\frac{V}{K}\,b\,\delta t$리터가 A이다. 따라서

$$\delta V \approx a\,\delta t - \frac{bV}{K}\,\delta t,$$

이고, 양변을 δt로 나눈 뒤 $\delta t \to 0$으로 보내면

$$\dot{V}(t) = -\frac{bV(t)}{K} + a,$$

가 되어 구하는 방정식을 얻는다.

이 방정식은 상수 계수 선형 방정식이다. 이를 $\dot{V} + \frac{b}{K}V = a$로 쓰고 적분인자(integrating factor) $\mathrm{e}^{bt/K}$를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\mathrm{e}^{bt/K}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/K} \quad \Longrightarrow \quad V\mathrm{e}^{bt/K} = \frac{aK}{b}\mathrm{e}^{bt/K} + C.$$

처음에 통에는 화학물질 B만 들어 있으므로 $V(0) = 0$이고, 따라서 $C = -\frac{aK}{b}$이다. 그러므로

$$V(t) = \frac{aK}{b}(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}), \qquad t \geq 0,$$

이 되어 증명이 끝난다.

두 번째 통

두 번째 통은 첫 번째 통으로부터 초당 b리터를 받고 초당 b리터씩 비워지므로, 부피는 L리터로 유지된다. 시각 t에서 이 통 안에 있는 A의 부피를 $W(t)$라 하면 $W(0) = 0$이다.

? 생각해 보기 화학물질 A는 어떤 비율로 두 번째 통에 도착하는가?

A는 첫 번째 통을 떠나는 비율과 정확히 같은 비율, 즉 $\frac{bV}{K} = a(1 - \mathrm{e}^{-bt/K})$로 도착한다. 그리고 같은 빠른 혼합 논리에 의해 $\frac{bW}{L}$의 비율로 나간다. 따라서

$$\dot{W} + \frac{b}{L}W = a - a\,\mathrm{e}^{-bt/K}.$$

적분인자 $\mathrm{e}^{bt/L}$를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W\mathrm{e}^{bt/L}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/L} - a\,\mathrm{e}^{bt(1/L - 1/K)}.$$

$L \neq K$이므로 지수 $b(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}) = \frac{b(K-L)}{KL}$는 0이 아니고, 따라서 둘째 항을 지수함수로 적분할 수 있다.

$$W\mathrm{e}^{bt/L} = \frac{aL}{b}\mathrm{e}^{bt/L} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{b(K-L)t/(KL)} + D.$$

양변에 $\mathrm{e}^{-bt/L}$를 곱하고 $\frac{b(K-L)}{KL} - \frac{b}{L} = -\frac{b}{K}$임에 주목하면

$$W = \frac{aL}{b} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{-bt/K} + D\mathrm{e}^{-bt/L}.$$

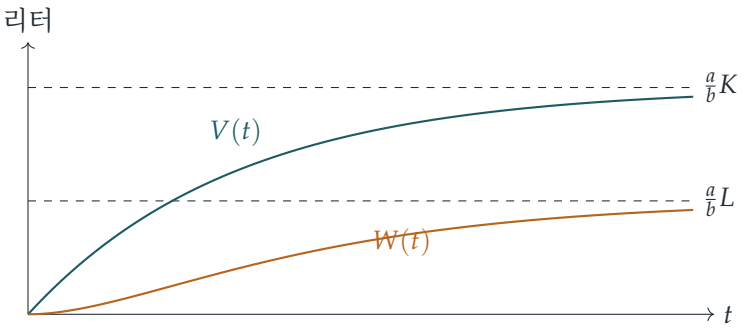
$W(0) = 0$으로 놓으면

$$D = \frac{aKL}{b(K-L)} - \frac{aL}{b} = \frac{aL}{b} \cdot \frac{K - (K-L)}{K-L} = \frac{aL^2}{b(K-L)}.$$

따라서 시각 $t \geq 0$에서 두 번째 통에는

$$\boxed{W(t) = \frac{aL}{b}\left(1 - \frac{K\mathrm{e}^{-bt/K} - L\mathrm{e}^{-bt/L}}{K-L}\right)}$$

리터의 화학물질 A가 들어 있다.



위 그림은 $a = 1, b = 2, K = 10, L = 5$를 사용한 것이다. W의 기울기가 0에서 시작한다는 점에 주목하자. 처음에는 첫 번째 통에서 들어오는 액체 속에 A가 거의 없기 때문이다.

검산

- $t = 0$에서 괄호 안의 값은 $1 - \frac{K-L}{K-L} = 0$이며, 마땅히 그래야 한다. 또한 $\dot{W}(0) = 0$인데, 이는 A가 $bV(0)/K = 0$의 비율로 도착한다는 사실과 일치한다.
- $t \to \infty$일 때 $V \to \frac{a}{b}K$이고 $W \to \frac{a}{b}L$이다. 즉 두 통 모두 결국 A의 농도가 a/b가 되는데, 이는 들어오는 액체의 농도이다.
- 이 공식은 앞에 붙은 인수 L을 제외하면 K와 L에 대하여 대칭이며, 이는 계산이 맞았는지 확인하는 좋은 일관성 검사가 된다.
- $a = 1, b = 2, K = 10, L = 5, t = 5$일 때 $V = 5(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 3.1606$이고 $W = 2.5(1 - \mathrm{e}^{-1})^2 \approx 0.99894$이다. 두 통을 (부피까지 추적하며) 수치적으로 시뮬레이션해 보면, a, b, K, L을 무작위로 여러 번 골라도 두 공식과 약 10^{-13} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- A의 유출량으로 $b - a$나 a를 사용하는 것: 유출량은 전체 유출 비율에 농도를 곱한 것이다.
- 두 번째 통으로 들어오는 A의 유입량을 a로 잡는 것: 첫 번째 통을 떠난 A만이 두 번째 통에 도달한다.
- $L \neq K$가 왜 필요한지 잊는 것: $L = K$이면 강제항 $\mathrm{e}^{-bt/K}$가 동차방정식(homogeneous equation)의 해가 되어, 답에 대신 $t\,\mathrm{e}^{-bt/K}$ 항이 포함된다.

STEP 너머

잘 섞이는 탱크들을 사슬처럼 이은 것은 표준적인 구획 모형(compartment model)으로, 몸속을 이동하는 약물 투여량이나 방사성 붕괴 사슬을 다루는 데 쓰인다. 이를 연립방정식 $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x} + \mathbf{f}$로 쓰면 감쇠율 b/K와 b/L은 M의 고윳값(eigenvalue)이 되고, $L = K$인 경우는 중복 고윳값에 해당한다. 이것이 바로 $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ 꼴의 해를 낳는 "공명(resonance)"과 같은 현상이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 혼합 문제와 선형 연립방정식을 모두 이런 방식으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.