풀이

STEP I 1993, 문제 8

순수수학 • 구와 벡터

> **STEP I 1993, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q8

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 원점과 좌표축을 대칭이 있는 곳에 놓는다. 구의 중심이 z축 위에 있고 평면이 $z = 0$이면, 방정식이 거의 모든 일을 해 준다. 구가 두 개인 경우도 더 어렵지 않은데, 두 방정식을 빼면 제곱항이 모두 소거되고 **평면**의 방정식이 남기 때문이다. 소문항 (ii)에서도 좌표를 쓰면 모든 것이 스칼라곱(scalar product)으로 귀결된다. B를 원점에 두어 두 기둥의 꼭대기를 모두 E에서 재도록 한다.

풀이

소문항 (i)

구와 평면. 구의 중심을 O', 반지름을 $r > 0$이라 하고, O'에서 평면에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 N이라 하자. N을 원점으로, 평면을 $z = 0$으로, z축을 NO' 방향으로 잡는다. 그러면 $O' = (0, 0, d)$이고, 여기서 $d \geq 0$은 중심에서 평면까지의 거리이다. 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2,$$

이므로, 어떤 점이 구와 평면 위에 동시에 있을 필요충분조건은 $z = 0$이고

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2.$$

인 것이다.

- $d < r$이면, 이것은 평면 위에서 중심이 N이고 반지름이 $\sqrt{r^2 - d^2}$인 원이다.
- $d = r$이면, $x^2 + y^2 = 0$에서 $x = y = 0$이어야 하므로 교집합은 한 점 N이다(이때 평면은 접평면(tangent plane)이다).

▶ $d > r$이면, 우변이 음수이므로 그런 점은 없고 교집합은 공집합이다.

이 경우들이 모든 가능성을 다루므로 첫 번째 명제가 증명된다.

두 구. 두 구의 반지름을 $r, s > 0$이라 하고, 서로 다른 두 중심 사이의 거리를 $c > 0$이라 하자. 첫 번째 중심을 원점에, 두 번째 중심을 $(0, 0, c)$에 놓는다.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = s^2.$$

? 생각해 보기 두 이차방정식의 해집합이 어떻게 원 하나일 수 있을까?

첫 번째 방정식에서 두 번째 방정식을 뺀다. 제곱항이 모두 소거되고

$$2cz - c^2 = r^2 - s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = h, \qquad \text{단, } h = \frac{r^2 - s^2 + c^2}{2c}.$$

가 남는다. 중심이 서로 다르므로 c로 나눌 수 있다. 어떤 점이 두 구 위에 모두 있을 필요충분조건은 그 점이 첫 번째 구 위에 있고 차의 방정식을 만족하는 것이므로

$$(\text{구 } 1) \cap (\text{구 } 2) = (\text{구 } 1) \cap (\text{평면} z = h).$$

이다. 첫 번째 결과에 의해 이것은 원, 한 점 또는 공집합이다. (구체적으로, $|h| < r$이면 평면 $z = h$ 위의 원 $x^2 + y^2 = r^2 - h^2$이고, $|h| = r$이면 한 점이며, $|h| > r$이면 공집합이다.) 이 원은 두 중심을 잇는 직선에 수직인 평면 위에 있고, 원의 중심은 그 직선 위에 있다.

소문항 (ii)

밑점에 대한 가정. 문제에는 A, B, C가 어디에 서 있는지 나와 있지 않다. 이들이 평평한 지면 위에서 한 변의 길이가 $2\,\mathrm{m}$인 정삼각형의 꼭짓점에 있다고 가정한다. 이것이 주어진 각을 만들어 내는 배치이다(검산 참고).

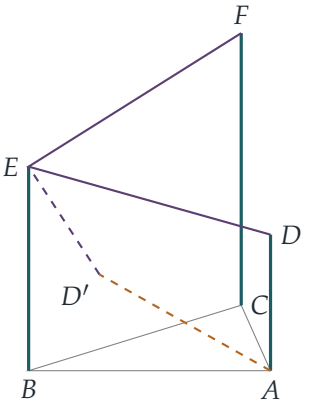
B를 원점으로, z축을 연직 방향으로 잡는다.

$$B = (0, 0, 0), \quad A = (2, 0, 0), \quad C = (1, \sqrt{3}, 0),$$

그러면 기둥의 꼭대기는

$$D = (2, 0, 2), \quad E = (0, 0, 3), \quad F = (1, \sqrt{3}, 4).$$

이다.



그림에서 D'(점선)은 반달리스트들이 기둥을 옮긴 뒤 D의 위치이다.

원래의 조형물. E에서 출발하는 벡터를 쓰면

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

이므로 $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 + 0 - 1 = 1$이고 $|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$이다. 따라서

$$\cos \angle DEF = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \qquad \text{이므로} \qquad \angle DEF = \cos^{-1} \tfrac{1}{5},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

반달리스트들이 다녀간 뒤. 기둥 AD는 여전히 길이가 2이고 여전히 A에 서 있다. 이제 이 기둥은 A와 B를 지나는 연직 평면(평면 $y = 0$) 안에 있으며, 지면과 $\frac{1}{4}\pi$의 각을 이루며 B 쪽으로 기울어져 있다. A에서 B 쪽으로 가는 것은 $-x$ 방향이므로

$$D' = \left(2 - 2\cos \tfrac{\pi}{4},\ 0,\ 2\sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(2 - \sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right).$$

이다. $2 - \sqrt{2} \approx 0.59$는 0과 2 사이에 있으므로, 점 D'은 실제로 선분 AB 위쪽에 있다. 이제

$$\overrightarrow{ED'} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{ED'} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 3) = -1,$$

이고

$$|\overrightarrow{ED'}|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) = 17 - 10\sqrt{2}.$$

이다.

생각해 보기 내적(dot product)이 음수이다. 이것은 각에 대해 무엇을 알려 주는가?

스칼라곱이 음수라는 것은 각이 둔각이라는 뜻이므로, $\frac{1}{2}\pi$와 π 사이에 있는 $\cos^{-1}$의 값을 구해야 한다.

$$\cos\angle D'EF = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{17-10\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{85-50\sqrt{2}}} \approx -0.264542,$$
$$\angle D'EF \approx 1.839 \text{ 라디안 (유효숫자 네 자리)}.$$

검산

- 밑면이 한 변의 길이가 s인 정삼각형이면, 같은 방법으로 $\cos\angle DEF = \dfrac{s^2/2-1}{s^2+1}$을 얻는다. 이 값은 $s=2$일 때에만 $\frac{1}{5}$와 같으므로, 가정한 밑면이 타당함을 뒷받침한다. 수치 계산으로도 $s=2$일 때 $\cos\angle DEF = 0.2$임을 확인하였다.
- $|AD'|=2$와 $\angle BAD' = \frac{1}{4}\pi$를 수치로 확인하였다. 새로운 각은 1.838525… 라디안(약 105.3°)으로 나와, 위의 정확한 꼴과 일치하였다.
- 소문항 (i): 무작위로 잡은 구들에 대해 예측된 원 위의 점들을 시험해 보았더니, 그 점들은 10^{-12} 이내의 오차로 두 곡면 위에 모두 놓였다.

흔한 실수

- 두 구의 경우에서 두 방정식의 차가 곧 교집합**이라고** 주장하는 것. 평면은 교집합을 포함할 뿐이므로, 여전히 그 평면과 두 구 중 하나의 교집합을 구해야 한다.
- D'을 A의 반대편, 즉 B에서 멀어지는 쪽에 놓는 것. 그 점은 선분 AB 위쪽에 있지 않으며, 다른 각을 준다.
- 답을 도 단위로 쓰거나, 음의 부호를 놓쳐 예각 $\cos^{-1}(0.2645)$로 쓰는 것.

STEP 너머

두 구의 방정식을 빼서 평면을 얻는 것은 두 원 또는 두 구의 **근평면**(radical plane, 2차원에서는 근축(radical axis))의 바탕이 되는 아이디어이다. 같은 기법으로 GPS 방식의 삼변측량(trilateration)을 선형 문제로 바꿀 수 있다. 더 일반적으로, 임의의 이차곡면(quadric surface)과 평면의 교선은 원뿔곡선(conic)이며, 이러한 교선을 분류하는 것은 이차형식(quadratic form)을 이용한 선형대수학의 좋은 첫 연습 문제이다. Strang의 *Introduction*

to Linear Algebra(선형대수학 입문)가 그 도구들을 전개하고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 좌표기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.