풀이

STEP I 1993, 문제 7

순수수학 • 삼차식의 근

> **STEP I 1993, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q7

핵심 아이디어

최고차항 계수(leading coefficient)가 양수인 삼차함수(cubic)는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 올라가므로, 근에 관한 모든 것은 두 극점(turning point)에서 결정된다. 곡선의 극댓값(local maximum)이 축보다 위에 있고 극솟값(local minimum)이 축보다 아래에 있으면 그래프는 축과 반드시 세 번 만나고, 그렇지 않으면 그보다 적게 만난다. $x^3 + ax^2 + b$의 경우에는 도함수(derivative)가 인수분해되므로 극점을 정확히 구하기 쉽다.

풀이

극점

$\mathrm{f}(x) = x^3 + Ax^2 + B$에 대하여

$$\mathrm{f}'(x) = 3x^2 + 2Ax = x(3x + 2A),$$

이므로 임계점(stationary point)은 $x = 0$과 $x = -\frac{2A}{3}$이다. 이 점에서의 함숫값은 $\mathrm{f}(0) = B$와

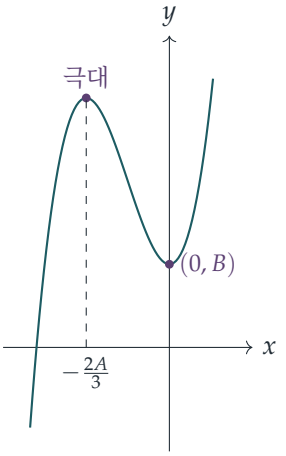
$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{2A}{3}\right) = -\frac{8A^3}{27} + \frac{4A^3}{9} + B = \frac{4A^3}{27} + B.$$

이다. 또 $\mathrm{f}''(x) = 6x + 2A$이므로 $\mathrm{f}''(0) = 2A$이고 $\mathrm{f}''(-\frac{2A}{3}) = -2A$이다. $A > 0$이면 $x = 0$인 점은 극소, $x = -\frac{2A}{3}$인 점은 극대이고, $A < 0$이면 그 역할이 서로 바뀐다.

$A > 0, B > 0$일 때의 개형

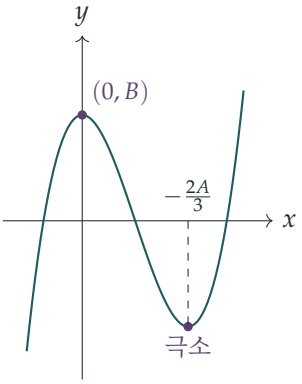
극대점은 $(-\frac{2A}{3},\ B + \frac{4A^3}{27})$로, y축의 왼쪽에 있고 B보다 높다. 극소점은 $(0, B)$로, y축의 양의 부분 위에 있다. 두 극점이 모두 x축보다 위에 있으므로 곡선은 극대점의 왼쪽에서 x축과

정확히 한 번 만난다. (그림은 $A = 3, B = 2$인 경우로, 극대점은 $(-2, 6)$, 극소점은 $(0, 2)$이다.)



$A < 0, B > 0$일 때의 개형

이번에는 극대점이 $(0, B)$이고 극소점은 y축의 오른쪽에 있는 $\left(-\frac{2A}{3}, B + \frac{4A^3}{27}\right)$이다. $A^3 < 0$이므로 극솟값은 B보다 작으며, 양수일 수도, 0일 수도, 음수일 수도 있다. $\mathrm{f}(0) = B > 0$이고 $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f} \to -\infty$이므로 $x < 0$인 근이 항상 하나 있다. 극솟값이 축보다 아래로 내려가면 $x > 0$인 근이 두 개 더 있다(그림의 $A = -3, B = 2$인 경우처럼, 극소점은 $(2, -2)$이고 근은 $1 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3}$이다). 극솟값이 축 위에 있으면 곡선은 그 점에서 축에 접한다. 극솟값이 축보다 위에 있으면 음의 근이 유일한 근이다.



근의 개수 세기

이제 $\mathrm{g}(x) = x^3 + ax^2 + b$를 생각하자. $a = 0$이면 g는 순증가(strictly increasing)하므로(도함수 $3x^2$는 0에서만 0이 된다) 실근(real root)을 정확히 하나 가진다. 따라서 $a \neq 0$이라 하자. 앞의 계산에서 g는 서로 다른 두 극점을 가지며, 그 함숫값은 b와 $b + \frac{4a^3}{27}$이다.

생각해 보기 두 극점에서의 함숫값으로 근의 개수를 어떻게 알 수 있을까?

극점을 $x_1 < x_2$라 하자. 이 삼차함수는 $(-\infty, x_1]$에서 순증가, $[x_1, x_2]$에서 순감소, $[x_2, \infty)$에서 순증가하므로 각 구간에서 근을 많아야 하나 가진다. $\mathrm{g}(x_1) > 0 > \mathrm{g}(x_2)$이면 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의하여($x \to \mp\infty$일 때 $\mathrm{g} \to \mp\infty$임을 이용하면) $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), (x_2, ∞) 각각에 근이 하나씩 있으므로 서로 다른 근이 세 개 있다. 반대로 두 값의 부호가 같거나 둘 중 하나가 0이면, 적어도 한 구간은 그 내부에 근이 없으므로 근은 많아야 두 개이다. 극댓값은 항상 두 값 중 큰 쪽이므로 "하나는 양수, 하나는 음수"는 "두 값의 곱이 음수"와 같다. 따라서 g가 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은

$$b\left(b + \frac{4a^3}{27}\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 27b^2 + 4a^3 b < 0.$$

이다. ($27 > 0$을 곱해도 부등식의 방향은 바뀌지 않는다.) 이 조건은 $a = 0$인 경우도 포함하는데, 이때 $27b^2 + 4a^3 b = 27b^2 \geq 0$이다.

첫 번째 조건

$27b^2 + 3a^3 b < 0$이라 하자. 그러면 $3a^3 b < -27b^2 \leq 0$이므로 $a^3 b < 0$이고, 따라서

$$27b^2 + 4a^3 b = \left(27b^2 + 3a^3 b\right) + a^3 b < 0 + 0 = 0.$$

이다. 앞의 판정 기준에 의하여 방정식은 서로 다른 세 실근을 가지며, 이것이 보이려던 것이다.

두 번째 조건

문제지에 인쇄된 대로라면 두 번째 조건은 부등식 $27b^2 + 4a^3 b < 0$을 반복하는데, "$<$"인 채로는 이 주장이 거짓이다. $a = -3$, $b = 1$이면 $27 - 108 = -81 < 0$이지만, $x^3 - 3x^2 + 1$은 $x = 0$에서 1, $x = 2$에서 -3의 값을 가지므로 서로 다른 세 실근을 가진다. 의도된 부등식은 반대 방향이어야 한다. 판정 기준에 의하면

$$27b^2 + 4a^3 b > 0$$

이면(사실 $27b^2 + 4a^3 b \geq 0$이기만 해도) 방정식의 서로 다른 실근은 세 개보다 적다. 이로써 문제가 해결된다.

따라서 정확한 경계선은 $27b^2 + 4a^3 b = 0$이다. $3a^3$이 들어간 조건은 세 근을 가지기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. $a = -2$, $b = 1$이면 $27b^2 + 3a^3 b = 3 > 0$이지만 $27b^2 + 4a^3 b = -5 < 0$이고, $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$은 세 근 1과 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$를 가진다.

검산

$A = -3$, $B = 2$이면 $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$이고, 그 근 1, $1 \pm \sqrt{3}$은 개형과 일치하며, 판정 기준이 예측하는 대로 $27 \cdot 4 + 4(-27)(2) = -108 < 0$이다. 수치적으로도, 첫 번째 조건을 만족하는 약 80,000개의 무작위 유리수 쌍 (a, b)에 대하여 두 임계점에서의 함숫값은 항상 부호가 반대였다. 200,000개의 쌍에 대하여 "서로 다른 세 근"은 $27b^2 + 4a^3b < 0$과 정확히 일치했다.

흔한 실수

- 두 극점이 하나의 변곡점(point of inflection)으로 합쳐지는 $a = 0$인 경우를 빠뜨린다.
- 극점에서의 함숫값이 0인 경우를 세 근으로 취급한다. 이때는 중근(repeated root)이 생기므로 서로 다른 근은 두 개뿐이다.
- 두 번째 명제가 판정 기준과 모순된다는 것을 알아채지 못하고 인쇄된 그대로 증명하려 한다.

STEP 너머

값 $-(4a^3b + 27b^2)$는 $x^3 + ax^2 + b$의 **판별식**(*discriminant*)으로, $b^2 - 4ac$에 대응하는 삼차식의 판별식이다. 이 값은 근들의 차의 제곱을 모두 곱한 것과 같으므로, 서로 다른 세 실근을 가지면 양수, 중근을 가지면 0, 두 근이 허근이면 음수이다. 판별식과 근의 대칭함수(symmetric function)는 갈루아(Galois) 이론에서 본격적으로 다룬다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.