풀이

STEP I 1993, 문제 6

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 1993, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q6

핵심 아이디어

모든 것은 $N = 10^{100}$일 때 x^N이 어떻게 행동하는지에 달려 있다. $|x| < 1$이면, 비록 1보다 아주 조금 작을 뿐이더라도 x^N은 상상할 수 없을 만큼 작다. $|x| > 1$이면, 비록 1보다 아주 조금 클 뿐이더라도 상상할 수 없을 만큼 크다. 그리고 $x = \pm 1$에서는 (N이 짝수이므로) 정확히 1이다. 따라서 분수 $x^N/(1+x^N)$은 스위치처럼 행동한다. 즉 $(-1, 1)$ 안에서는 0이고 바깥에서는 1이다. h에 대해서는 정반대의 아이디어가 쓰인다. $10^{-N}x$가 너무나 작아서 sin이 그 인수와 구별되지 않는다.

풀이

이 풀이 전체에서

$$s(x) = \frac{x^N}{1+x^N} = \frac{1}{1+x^{-N}} \quad (x \neq 0), \qquad s(0) = 0,$$

으로 두면, $\mathrm{f}(x) = 2 + s(x)$이고 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$이다.

f의 특징

- **대칭성과 치역.** N이 짝수이므로 $x^N = (-x)^N \geq 0$이다. 따라서 f는 우함수(even function)이고, $0 \leq s(x) < 1$로부터 $2 \leq \mathrm{f}(x) < 3$을 얻는다.
- **$|x| < 1$에서의 높이 $y = 2$.** 여기서는 $x^N \to 0$이 엄청난 속도로 일어난다. 예를 들어 $0.99^N = 10^{N \log_{10} 0.99} \approx 10^{-4.4 \times 10^{97}}$이다. 따라서 $s(x) \approx x^N$은 그래프로 나타낼 수 있는 어떤 크기보다도 훨씬 작고, 눈에 보이는 어떤 정확도로도 $\mathrm{f}(x) = 2$이다. 정확히는 $\mathrm{f}(0) = 2$이다.

- $|x| > 1$에서의 높이 $y = 3$. 이제 x^{-N}도 마찬가지로 아주 작으므로, $s(x) = 1/(1 + x^{-N})$은 눈에 보이는 어떤 정확도로도 1이고 $f(x) = 3$이며, 이 값에 아래쪽에서 접근한다. (실제로 직선 $y = 3$은 $|x| \to \infty$일 때의 점근선(asymptote)이다.)
- $x = \pm 1$에서의 도약. $x = \pm 1$에서는 $x^N = 1$이므로 $f(\pm 1) = \frac{5}{2}$로, 딱 중간 높이이다. 이 함수는 연속(continuous)이고 미분가능(differentiable)하므로, 스케치에 그린 수직 선분은 실제로는 극도로 가파른 오르막이다. 미분하면

$$f'(x) = \frac{Nx^{N-1}}{(1+x^N)^2}, \qquad f'(1) = \frac{N}{4} = 2.5 \times 10^{99}.$$

생각해 보기 그래프의 "수직" 부분은 얼마나 좁을까?

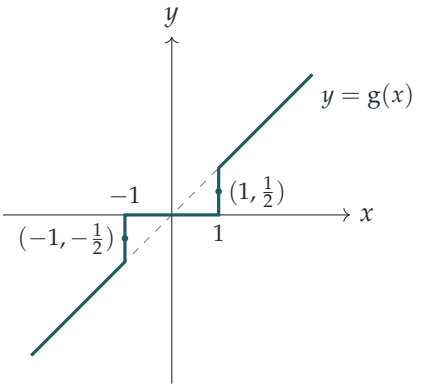
δ가 작을 때 $x = 1 + \delta$로 두면 $x^N = e^{N\ln(1+\delta)} \approx e^{N\delta}$이고 $s(x) \approx 1/(1 + e^{-N\delta})$이다. $N\delta$가 $-\ln 99$에서 $\ln 99$까지 변하는 동안 이 값은 0.01에서 0.99까지 올라간다. 즉 폭이 약 9×10^{-100}인 구간에서 이 오르막이 일어난다. 어떤 그림에서든 이것은 수직선이다. 대칭성에 의해 $x = -1$에서도 같은 일이 일어난다. (x^{N-1}의 부호는 x의 부호와 같으므로, f'의 부호로부터 f가 $x > 0$에서 증가하고 $x < 0$에서 감소한다는 것도 알 수 있다.)

g의 그래프

$g(x) = x\,s(x)$이므로, 이제 스위치 s가 직선 $y = x$에 곱해진다.

- $|x| < 1$이면 $s(x)$는 무시할 수 있을 만큼 작으므로, 눈에 보이는 어떤 정확도로도 $g(x) = 0$이다($x = 0$에서는 정확히 0이다).
- $|x| > 1$이면 $s(x)$는 눈에 보이는 어떤 정확도로도 1이므로 $g(x) = x$이다. 정확히 말하면 $x - g(x) = \dfrac{x}{1+x^N}$이고, 이는 무시할 수 있다.
- $x = \pm 1$에서는 $g(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$로, 각 도약의 중간 높이이다.

s가 우함수이고 x가 기함수이므로 g는 기함수(odd function)이다. 또한 증가함수이다. $g'(x) = s(x) + x\,s'(x)$이고, x와 $s'(x)$의 부호가 같으므로 두 항 모두 ≥ 0이기 때문이다. $x = 1$에서 기울기는 $g'(1) = \frac{1}{2} + \frac{N}{4}$이므로 여기서도 겉보기에 수직인 도약이 나타나는데, 이번에는 $x = 1$에서 0부터 1까지, 그리고 $x = -1$에서 -1부터 0까지 올라간다.



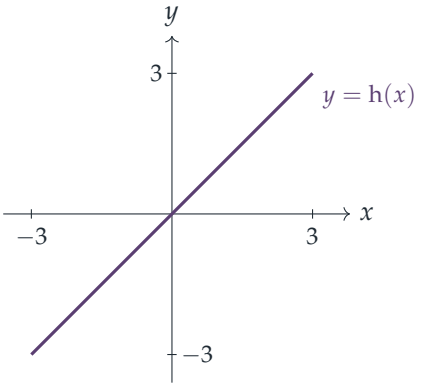
$[-3,3]$에서 그린 g의 스케치: $(-1,1)$에서는 값이 0이고 바깥에서는 직선 $y=x$(점선)를 따르며, 이 둘은 $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$를 지나는 거의 수직인 오르막으로 이어진다.

h의 그래프

$u=10^{-N}x$라 하자. $|x|\le 3$이면 $|u|\le 3\times 10^{-N}$이고, 이는 엄청나게 작다. 작은 u에 대해 $\sin u = u-\frac{u^3}{6}+\cdots$이고, $u>0$이면 부등식 $u-\frac{u^3}{6}\le \sin u\le u$가 성립한다. 여기에 10^N을 곱하면 $0\le x\le 3$에 대해

$$0\le x-\mathrm{h}(x)\le \frac{x^3}{6}10^{-2N}\le \frac{27}{6}\times 10^{-2N},$$

이고, h는 기함수이므로 $-3\le x\le 0$에서도 부호만 반대로 하여 같은 결과가 성립한다. 따라서 $[-3,3]$에서 h의 그래프는 상상할 수 있는 어떤 정확도로도 원점을 지나는 직선 $y=x$이며, $x>0$에서는 그 직선보다 아주 조금 아래에, $x<0$에서는 아주 조금 위에 놓인다. 기울기는 $\mathrm{h}'(x)=\cos(10^{-N}x)$이고, 이는 약 10^{-2N} 이내의 오차로 1이다.



사인 곡선은 여전히 존재하지만 엄청나게 늘어나 있다. 첫 번째 극댓값은 $x=\frac{\pi}{2}\times 10^N$에서 나타나고 그 높이는 10^N이므로, 창 $[-3,3]$에는 원점을 지나는, 직선처럼 보이는 아주 작은 조각만 보인다.

검산

- $s = 1/(1+\mathrm{e}^{-N\ln|x|})$로 직접 계산하면, $s(0.999)$와 $s(1.001)$은 기계 정밀도(machine precision) 내에서 각각 0과 1이고, $s(\pm1) = \frac{1}{2}$는 정확한 값이다.
- $N = 10$이나 200처럼 적당한 크기의 N으로 수치 미분을 하면 $s'(1) = N/4$와 $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + N/4$가 확인되고, 촘촘한 격자에서 계산하면 g가 $[-3,3]$에서 증가함을 알 수 있다. N을 키우면 계단이 더 날카로워질 뿐이다.
- 임의의 $x \in [-3,3]$에 대해 $10^{100}\sin(10^{-100}x)$는 배정밀도(double precision)의 모든 자릿수까지 x와 일치하고, 규모를 줄인 유사한 함수 $M\sin(x/M)$은 $M = 1000$일 때 부등식 $0 < x - M\sin(x/M) \leq x^3/(6M^2)$을 만족한다.

흔한 실수

- N이 짝수라는 사실을 잊는 것: $x < -1$에서 x^N은 거대한 **양수**이므로, 그곳에서 f는 다른 값이 아니라 3이다.
- 계단을 진짜 불연속(discontinuity)으로 설명하는 것. 세 함수는 모두 연속이며 (사실 미분가능하며), 오르막이 너무 가팔라서 그릴 수 없을 뿐이다.
- h를 진동하는 그래프로 다루는 것. $[-3,3]$에서는 극점 근처에도 전혀 가지 않는다.

STEP 너머

함수 $x^n/(1+x^n)$은 짝수 값을 따라 $n \to \infty$로 갈 때, $(-1,1)$ 안에서는 0, ±1에서는 $\frac{1}{2}$, 바깥에서는 1인 계단함수(step function)로 **점별** 수렴(pointwise convergence)한다. 즉 매끄러운 함수들의 수열인데 그 극한은 불연속이다. 이는 해석학자들에게 왜 **균등** 수렴(uniform convergence)이 필요한지 보여 주는 고전적인 예이며, 균등 수렴은 실해석학(real analysis) 첫 강의의 핵심 개념이다. 함수 h는 그 반대편을 보여 준다. $M \to \infty$일 때 유계 구간에서 $M\sin(x/M) \to x$로 균등 수렴한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 두 개념을 모두 매우 읽기 쉽게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.