풀이

STEP I 1993, 문제 5

순수수학 • 절댓값과 삼각부등식

STEP I 1993, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q5

핵심 아이디어

모든 것은 삼각부등식(triangle inequality)에 바탕을 둔다. 합의 길이는 길이들의 합보다 크지 않다. 이를 항별로 적용하면 다항식(polynomial)이 $|z|$에 관한 등비급수(geometric series)로 위에서 눌리고, $|z| \leq \frac{1}{2}$이면 그 급수는 언제나 1보다 확실히 작다. 근(root)이라면 다항식 부분이 -1과 같아야 하는데, -1의 절댓값(modulus)은 정확히 1이다. 따라서 근은 원판(disc) $|z| \leq \frac{1}{2}$ 안에 있을 수 없다.

풀이

절댓값과 곱의 법칙

x, y가 실수일 때 $z = x + \mathrm{i}y$의 절댓값은 원점에서 점 (x, y)까지의 거리이다.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(음이 아닌 제곱근)}.$$

a, b, c, d가 실수일 때 $z_1 = a + \mathrm{i}b, z_2 = c + \mathrm{i}d$라 하자. 그러면 $z_1 z_2 = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$이므로

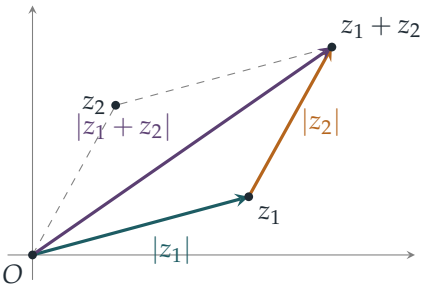
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

$|z_1 z_2|$와 $|z_1||z_2|$는 모두 음이 아니므로, 양변에 제곱근을 취하면 요구한 대로 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$를 얻는다.

삼각부등식

복소평면(Argand diagram)에서 O를 원점, A를 점 z_1, C를 점 $z_1 + z_2$라 하자. 그러면 $\overrightarrow{AC}$는 z_2를 나타내고(O에서 z_2로 가는 벡터와 같은 벡터이다), 따라서 OAC는 세 변의 길이가 다음과 같은 삼각형이다.

$$OA = |z_1|, \qquad AC = |z_2|, \qquad OC = |z_1 + z_2|.$$



두 점 사이의 가장 짧은 경로는 직선이다. O에서 C로 곧장 가는 길은 A를 거쳐 가는 길보다 길지 않다. 따라서

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

이고, 등호는 O, A, C가 한 직선 위에 있고 A가 그 사이에 있을 때, 즉 z_1과 z_2가 같은 방향을 가리킬 때(또는 둘 중 하나가 0일 때) 정확히 성립한다.

대수적인 방법을 선호한다면, 켤레복소수(conjugate)를 $\bar{z}$로 나타낼 때

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

이다. 복소수의 실수부(real part)는 그 절댓값보다 크지 않고, 곱의 법칙에 의해 $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$이기 때문이다.

이 부등식을 거듭 적용하면(항의 개수에 대한 간단한 수학적 귀납법(induction)으로) 임의의 복소수 $w_1, \ldots, w_n$에 대하여

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \leq |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|$$

를 얻는다.

다항식의 상계

각 j에 대하여 $|a_j| \le 1$이고 $|z| \le \frac{1}{2}$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z\right| &\le |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| \\ &\le |z|^n + |z|^{n-1} + \cdots + |z| \\ &\le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \tfrac{1}{2} \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &< 1.\end{aligned}$$

첫째 줄은 n개 항에 대한 삼각부등식과 곱의 법칙(거듭 적용하여 $|a_k z^k| = |a_k||z|^k$)을 쓴 것이다. 둘째 줄은 $|a_j| \le 1$을, 셋째 줄은 $0 \le |z| \le \frac{1}{2}$를 쓰고, 넷째 줄은 유한 등비급수의 합을 구한 것이다. 이것이 요구한 엄격한 부등식이다.

> ? **생각해 보기** 엄격한 부등식은 어디에서 오는가? 위의 각 단계는 모두 "$\le$"일 뿐이다.

그것은 유한 등비급수에서 온다. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$은 1보다 정확히 $\frac{1}{2^n} > 0$만큼 모자란다. 바로 이 차이가 다음 결론을 끌어내는 데 필요하다.

근

(문제지의 마지막 줄에는 $|x| > \frac{1}{2}$라고 되어 있는데, 지금 다루는 근이 w이므로 이는 분명히 $|w| > \frac{1}{2}$의 오식이다.)

w를 근이라 하면

$$a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + a_1 w = -1, \qquad \text{따라서} \qquad |a_n w^n + \cdots + a_1 w| = |-1| = 1.$$

귀류법(proof by contradiction)으로, $|w| \le \frac{1}{2}$라고 가정하자. 그러면 앞 부분에 $z = w$를 대입하여 $|a_n w^n + \cdots + a_1 w| < 1$을 얻는데, 이는 절댓값이 정확히 1이라는 사실에 모순이다. 따라서 모든 근은 $|w| > \frac{1}{2}$를 만족한다.

검산

- 이 상계는 극한에서 도달된다. 모든 $a_j = 1$이고 $z = \frac{1}{2}$이면 좌변은 정확히 $1 - 2^{-n}$이다.
- 근에 관한 결과도 더 이상 개선할 수 없다. 모든 $a_j = -1$로 두면 $1 - z - z^2 - \cdots - z^n = 0$이 되고, 그 양의 근은 $n = 1$일 때 1, $n = 2$일 때 0.618(황금비(golden ratio)의 켤레), $n = 5$일 때 0.5087, $n = 10$일 때 0.50025이다. 항상 $\frac{1}{2}$보다 크지만 $\frac{1}{2}$에 가까워진다.

- 수치적으로, 단위원판 안의 a_j와 반지름 $\frac{1}{2}$인 원판 안의 z를 무작위로 50 000번 골라 시험했고(찾은 최댓값은 0.79), 이러한 무작위 다항식 2000개의 모든 근을 구했다. 근의 절댓값 중 가장 작은 것은 0.562였다.

흔한 실수

- $|a_1z + \cdots + a_nz^n| = |a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n$이라고 쓰는 것. 삼각부등식은 "$\leq$"만 보장한다.
- 무한급수 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$을 쓰는 것. 이렇게 하면 ≤ 1밖에 얻지 못해 결론을 끌어낼 수 없다. 유한합을 써야 한다.
- $|z^k| = |z|^k$의 근거를 대지 않는 것. 이는 방금 증명한 곱의 법칙에서 나온다.

STEP 너머

이것은 수치적 근 찾기의 바탕이 되는 다항식 근의 상계에 관한 결과들의 아주 간단한 형태이다. 코시(Cauchy)의 상계는 다항식의 모든 근을, 반지름이 계수의 크기에만 의존하는 원판 안에 가두며, 같은 "지배적인 항이 이긴다"는 논법이 복소해석학(complex analysis)의 루셰(Rouché) 정리를 움직인다. 삼각부등식 자체는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심에 있는 추상적인 거리 개념인 **거리**(metric)를 정의하는 성질이다. 이 모든 내용을 아름답고 기하학적으로 다룬 책으로 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.