풀이

STEP I 1993, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1993, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $t = \pi - x$는 구간(interval) $[0, \pi]$를 자기 자신으로 뒤집어 옮기며, $\sin(\pi - t) = \sin t$이므로 $\sin x$를 바꾸지 않는다. 따라서 다루기 까다로운 인수 x는 $\pi - t$로 바뀌고, 우리가 구하려는 적분이 우변에 음의 부호를 달고 다시 나타난다. 그래서 이 적분에 대한 방정식을 풀 수 있다. 그 뒤에 나오는 적분들에서 할 일은 주로 $1 + \cos^2 x$를 $\sin x$로 나타내는 것이다. 구간 $[\pi, 2\pi]$에서는 π만큼 평행이동하면 다시 $[0, \pi]$로 돌아온다.

풀이

일반적인 결과

$I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$라 하고 $t = \pi - x$로 놓는다. 그러면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$이다. $x = 0$일 때 $t = \pi$이고, $x = \pi$일 때 $t = 0$이다. 또한 $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$이다. 따라서

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

적분변수(variable of integration)의 이름은 상관이 없으므로 마지막 적분은 다시 I이다. 그러므로 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t$이고, 이로부터

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

를 얻어 원하는 결과가 증명된다. (적분이 존재해야 하는데, 예를 들어 f가 $[-1, 1]$에서 연속(continuous)이면 된다.)

구간 $[0, \pi]$에서의 적분

생각해 보기 피적분함수(integrand)에는 $\sin x$뿐 아니라 $\cos^2 x$도 들어 있다. 정말 $x\,\mathrm{f}(\sin x)$ 꼴일까?

그렇다. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로 $1 + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$이고, 따라서

$$\frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = x\,\mathrm{f}(\sin x) \qquad \text{단,} \qquad \mathrm{f}(s) = \frac{s}{2 - s^2},$$

이며 f는 $[-1, 1]$에서 연속이다. 일반적인 결과에 의해

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x$는 $\cos x$의 도함수(derivative)에 음의 부호를 붙인 것이므로 남은 적분은 쉽다. $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$로 치환하면

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \Big[\arctan u\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

그러므로

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

구간 $[0, 2\pi]$에서의 적분

일반적인 결과는 $[0, \pi]$에만 적용되므로 적분 구간을 나눈다.

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

생각해 보기 $\int_\pi^{2\pi}$를 어떻게 $[0, \pi]$에서의 적분으로 되돌릴 수 있을까?

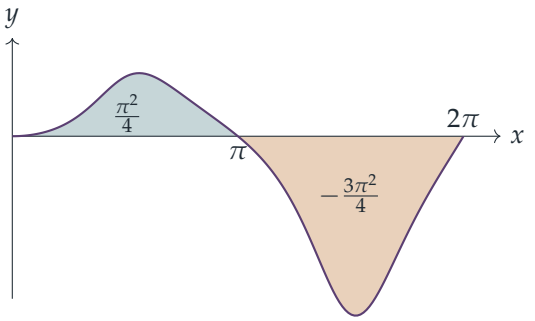
π만큼 평행이동한다. $x = u + \pi$로 놓으면 u는 0부터 π까지 변한다. 이때 $\sin x = -\sin u$이고 $\cos x = -\cos u$이므로 $\cos^2 x = \cos^2 u$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(u + \pi)(-\sin u)}{1 + \cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^\pi \frac{u \sin u}{1 + \cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \pi \int_0^\pi \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{\pi^2}{4} - \pi \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4},
\end{aligned}$$

이며, 여기서 앞 단계의 두 결과를 모두 사용하였다. 두 부분을 더하면

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

그래프를 보면 답이 음수인 이유를 알 수 있다. $[\pi, 2\pi]$에서는 인수 $\sin x$가 음수이고, 그곳에서 인수 x는 $[0, \pi]$에서보다 크다. 그래서 축 아래쪽 넓이가 축 위쪽 넓이보다 크다.



검산

- $f \equiv 1$로 두면 일반적인 결과는 $\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}$를 주는데, 이는 옳다.
- 피적분함수는 $(0, \pi)$에서 양수이므로 첫 번째 답은 양수여야 하며, 실제로 $\pi^2/4 \approx 2.467$는 양수이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 첫 번째 적분은 2.4674011, 두 번째 적분은 -4.9348022로, 각각 $\pi^2/4$와 $-\pi^2/2$에 일치한다.
- 일반적인 항등식도 임의로 고른 여러 f에 대해 수치적으로 확인된다.

흔한 실수

- 일반적인 결과를 $[0, 2\pi]$에 그대로 적용하는 것. 이 결과는 반사 $x \mapsto \pi - x$가 구간을 자기 자신으로 옮긴다는 사실에 의존하며, $[0, 2\pi]$에 적용하면 틀린 답 $\frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$이 나온다. (그 구간에서 올바른 반사는 $x \mapsto 2\pi - x$이고, 이때 $\sin x$의 부호가 바뀐다.)
- $dx = -dt$에서 나오는 음의 부호를 빠뜨리거나, 적분 구간의 위끝과 아래끝을 다시 바꾸는 것을 잊는 것.
- $\arctan(-1) = 3\pi/4$라고 쓰는 것. 역탄젠트(arctangent)의 값은 $(-\pi/2, \pi/2)$에 속하므로 $\arctan(-1) = -\pi/4$이다.

STEP 너머

여기서 쓴 요령은 피적분함수가 거의 따르는 정의역의 대칭(symmetry)을 이용하는 것이다. 즉 x를 $\pi - x$로 바꾸고 두 형태의 적분을 평균한다. 같은 아이디어로 적분을 직접 계산하지 않고도 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$를 얻을 수 있다. 대학에서는 이와 같은 대칭 논

법이 해석학(analysis) 곳곳과 푸리에 급수(Fourier series)에서 등장하는데, 푸리에 급수에서는 함수의 홀짝성(parity)이 어떤 항이 살아남는지를 결정한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 종류의 치환을 연습할 수 있는 STEP 스타일 문제가 더 있고, Abbott의 *Understanding Analysis*는 변수 변환 공식(change-of-variables rule)을 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.