풀이

STEP I 1993, 문제 3

순수수학 • 디오판토스 방정식

> **STEP I 1993, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q3

핵심 아이디어

$p \le q \le r$이므로 역수(reciprocal) $\frac{1}{p}$가 세 항 가운데 **가장 크다**. 따라서 합은 많아야 $\frac{3}{p}$이고, 이로부터 p의 값이 두어 개로 좁혀진다. p를 정하고 나면 남은 두 항에 같은 방법을 써서 q의 범위를 제한할 수 있고, 그러면 r은 저절로 결정된다. 핵심은 순서 관계를 이용하여 미지수가 세 개인 방정식(또는 부등식(inequality))을 짧은 유한 개의 경우 확인으로 바꾸는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$1 \le p \le q \le r$이므로 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$이다. 따라서

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p},$$

이고, 이로부터 $p \le 3$을 얻는다. 또한 $p \neq 1$인데, $p = 1$이면 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$이 되어 양수 q, r에 대해 불가능하기 때문이다. 따라서 $p = 2$ 또는 $p = 3$이다.

경우 $p = 2$. 이제 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$이다. $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q}$이므로

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad q \le 4,$$

이고, $\frac{1}{r} > 0$이므로 $\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$이어야 한다. 즉 $q \ge 3$이다.

- $q = 3$: $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이므로 $r = 6$이다.

- $q = 4$: $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$이므로 $r = 4$이다.

경우 $p = 3$**.** 이제 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{q}$이므로 $q \leq 3$이다. $q \geq p = 3$과 함께 생각하면 $q = 3$일 수밖에 없고, 그러면 $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$이므로 $r = 3$이다.

모든 경우를 다 살펴보았으므로, 해는

$$(p, q, r) = (2, 3, 6), \quad (2, 4, 4), \quad (3, 3, 3),$$

뿐이고 다른 해는 없다.

소문항 (ii)

$p = 1$이면 모든 q와 r에 대해 합이 $1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$이다. 이것이 문제에서 이미 알려 준 해들이다. (순서 조건 $p \leq q \leq r$에 따르면 이 해들은 $1 \leq n \leq m$인 $q = n, r = m$이다. 문제에서 m과 n 사이에 적어 놓은 부등호는 방향이 거꾸로이지만 상관없다. $p = 1$은 어떤 q와 r에 대해서도 성립하기 때문이다.) 따라서 $p \geq 2$인 해를 찾는다.

앞에서와 마찬가지로 $\frac{1}{p}$가 가장 큰 항이므로

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{p} \quad \Longrightarrow \quad p < 3.$$

$p \geq 2$와 함께 생각하면 $p = 2$이다. 이제 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}.$$

생각해 보기 왜 이번에는 q의 범위에서 부등호가 엄격한 부등호가 되며, 그것이 중요한가?

$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{q}$이므로 $\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{2}{q}$이고, 따라서 $q < 4$이다. $q = 4$를 배제하는 것이 바로 이 엄격한 부등호이다. (소문항 (i)에서는 $q = 4$가 허용되었고, 등호가 성립하는 경우인 $(2, 4, 4)$를 주었다.) $q \geq p = 2$와 함께 생각하면 $q = 2$ 또는 $q = 3$이다.

- $q = 2$: 합은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} > 1$이고, 이는 **모든** r에 대해 성립한다. 따라서 $r \geq 2$인 모든 정수 r에 대해 $(2, 2, r)$는 해이다.
- $q = 3$: $\frac{1}{r} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이어야 하므로 $r < 6$이다. $r \geq q = 3$과 함께 생각하면 $r = 3, 4, 5$이다.

따라서 $p = 1$인 해들을 제외하면, 해는

$$(p, q, r) = (2, 2, r)\text{ , 정수}r \geq 2, \qquad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5).$$

이다. 위의 각 단계는 모두 필연적이었으므로 다른 해는 없다.

검산

직접 대입해 본다. 예를 들어 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$이지만 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$로 정확히 1이다. 이를 보면 왜 $(2,3,5)$가 $q=3$인 해들 가운데 마지막이고, $(2,3,6)$이 소문항 (i)에서 나온 경계의 경우인지 알 수 있다. 마찬가지로 $(2,4,4)$는 합이 정확히 1이므로, $p=2, q=4$인 것은 하나도 소문항 (ii)의 해가 되지 못한다. $1\leq p\leq q\leq r<400$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색해 보면 두 목록이 정확히 맞음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 무한히 많은 해 $(2,2,r)$를 빠뜨리는 것. $p=q=2$이면 처음 두 항만으로 이미 합이 1이 된다.
- 소문항 (ii)에서 $p<3$ 대신 $p\leq 3$이라고 쓴 뒤 $p=3$인 경우(합이 많아야 1이다)에 시간을 낭비하는 것.
- 모든 경우를 확인했음을 보이지 않고 해의 목록만 적는 것. "다른 해가 없다"는 부분이 배점의 절반이다.

STEP 너머

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$의 해는 각의 크기가 $\frac{\pi}{p},\frac{\pi}{q},\frac{\pi}{r}$인 삼각형이 구면(sphere) 위에 존재하는 세 수의 쌍과 정확히 일치한다. 이들은 3차원의 유한 대칭군(symmetry group)에 대응한다. $(2,2,r)$는 이면체군(dihedral group), $(2,3,3)$은 정사면체군(tetrahedral group), $(2,3,4)$는 정팔면체군(octahedral group), $(2,3,5)$는 정이십면체군(icosahedral group)에 해당한다. 소문항 (i)의 해는 평면의 세 가지 정규 쪽매맞춤(regular tiling)을 준다. 이와 같이 정수 범위에서 푸는 방정식을 디오판토스 방정식(Diophantine equation)이라 한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 좋은 입문서이고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대칭군을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.