풀이

STEP I 1993, 문제 2

순수수학 • 등비급수

> **STEP I 1993, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q2

핵심 아이디어

각 급수(series)는 등비수열(geometric progression)에서 일부 항을 뺀 것이다. $S_n(r)$의 지수(exponent)는 3의 배수가 아닌 수들이다. $T_n(r)$의 지수는 짝수이거나 또는 3의 배수인 수들이다. 따라서 각 합을 완전한 등비수열들의 조합으로 나타낸다. 즉 전체 등비수열을 택한 뒤 필요 없는 항을 빼거나, 두 등비수열을 더한 뒤 두 번 센 항을 뺀다.

풀이

짝수 거듭제곱의 합

좌변은 첫째항이 1, 공비(common ratio)가 r^2, 항의 개수가 $n+1$인 등비수열의 합이다. 이를 E라 하자. 그러면

$$E - r^2E = (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}) - (r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n+2}) = 1 - r^{2n+2},$$

이다. 나머지 항은 모두 소거되기 때문이다. $|r| \neq 1$이면 $r^2 \neq 1$이므로 $1 - r^2$로 나눌 수 있다.

$$1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (실수 r에 대하여 조건 $r^2 \neq 1$은 정확히 $|r| \neq 1$과 같다.)

급수 $S_n(r)$

지수 $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots, 3n-1$은 1부터 $3n-1$까지의 정수 중 3의 배수가 아닌 것들이다. 이들은 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $3k+1,\ 3k+2$의 쌍으로 묶인다. 따라서

$$S_n(r) = \sum_{k=0}^{n-1} (r^{3k+1} + r^{3k+2}) = (r + r^2) \sum_{k=0}^{n-1} r^{3k}.$$

마지막 합은 공비가 r^3이고 항이 n개인 등비수열의 합이다. 실수 r에 대하여 $r \neq 1$이면 $r^3 \neq 1$이므로

$$S_n(r) = \frac{r(1+r)(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

이다. 같은 결과를 다른 방법으로 얻을 수도 있다. 거듭제곱 $r, r^2, \ldots, r^{3n}$을 모두 택한 뒤 지수가 3의 배수인 것을 빼면

$$S_n(r) = \frac{r(1-r^{3n})}{1-r} - \frac{r^3(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

이다. 극한(limit)을 구할 때 필요한 것은 이 두 번째 형태이다.

극한. $|r| < 1$이면 $n \to \infty$일 때 $|r^{3n}| = |r|^{3n} \to 0$이다. 따라서

$$S_n(r) \to \frac{r}{1-r} - \frac{r^3}{1-r^3}.$$

그런데 $\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{1}{1-r} - 1$이고 $\dfrac{r^3}{1-r^3} = \dfrac{1}{1-r^3} - 1$이다. 두 개의 -1이 상쇄되어

$$S_n(r) \to \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r^3},$$

이 남으므로 원하는 결과를 얻는다.

급수 $T_n(r)$

지수 $0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots, 6n$은 0부터 $6n$까지의 정수 중 짝수이거나 3으로 나누어떨어지는(또는 둘 다인) 것들이다.

> ? **생각해 보기** 짝수 거듭제곱과 지수가 3의 배수인 거듭제곱을 더하면, 어떤 항을 두 번 센 것인가?

지수가 짝수이면서 동시에 3의 배수인 것은 정확히 그 지수가 6의 배수일 때이다. 그러므로 포함-배제(inclusion–exclusion)를 사용한다. 즉 짝수 거듭제곱을 더하고, 지수가 3의 배수인 거듭제곱을 더한 뒤, 지수가 6의 배수인 거듭제곱을 뺀다. $6n$까지는 다음이 있다.

- 짝수 거듭제곱 $r^0, r^2, \ldots, r^{6n}$: 공비가 r^2이고 항이 $3n+1$개인 등비수열을 이룬다.

- 지수가 3의 배수인 거듭제곱 $r^0, r^3, \ldots, r^{6n}$: 공비가 r^3이고 항이 $2n+1$개인 등비수열을 이룬다.
- 지수가 6의 배수인 거듭제곱 $r^0, r^6, \ldots, r^{6n}$: 공비가 r^6이고 항이 $n+1$개인 등비수열을 이룬다.

첫 번째 결과에서 n을 $3n$으로 바꾸고, 공비가 r^3과 r^6인 경우에도 같은 논증을 적용하면

$$\mathrm{T}_n(r) = \frac{1-r^{6n+2}}{1-r^2} + \frac{1-r^{6n+3}}{1-r^3} - \frac{1-r^{6n+6}}{1-r^6}.$$

을 얻는다. $|r| \neq 1$이므로 어느 분모도 영이 되지 않는다. 문제에서 여기서는 $|r| \neq 1$을 요구하고 S_n에 대해서는 $r \neq 1$만 요구하는 까닭이 바로 이것이다. $r = -1$이면 $1-r^2$와 $1-r^6$이 영이 된다.

극한. $|r| < 1$이면 r^{6n+2}, r^{6n+3}, r^{6n+6}은 모두 0으로 수렴(converge)한다. 따라서

$$\mathrm{T}_n(r) \to \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3} - \frac{1}{1-r^6}.$$

이다. $1-r^6 = (1-r^2)(1+r^2+r^4) = (1-r^3)(1+r^3)$을 이용하여 공통분모 $1-r^6$으로 통분하면 다음과 같이 정리된다.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(r) = \frac{(1+r^2+r^4)+(1+r^3)-1}{1-r^6} = \frac{1+r^2+r^3+r^4}{1-r^6}.$$

$r > 1, r = 1, r = -1$인 경우

먼저 항의 개수를 센다. 연속한 여섯 지수 $6k, 6k+1, \ldots, 6k+5$로 이루어진 각 묶음에서 짝수이거나 3으로 나누어떨어지는 것은 $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$의 네 개이다. 묶음 $k = 0, \ldots, n-1$이 $6n-1$까지의 지수를 모두 포함하고, 마지막 항은 r^{6n}이다. 따라서 $\mathrm{T}_n(r)$의 항은 $4n+1$개이다.

- $r > 1$: 모든 항 r^e가 $r^e \geq 1$을 만족하므로 $\mathrm{T}_n(r) \geq 4n+1$이고, 따라서 $\mathrm{T}_n(r) \to \infty$이다.
- $r = 1$: 모든 항이 1이므로 $\mathrm{T}_n(1) = 4n+1 \to \infty$이다. 이 경우에는 분모가 영이 되므로 공식이 성립하지 않는다.
- $r = -1$: $(-1)^e$는 짝수 e에 대해서는 $+1$이고 홀수 e에 대해서는 -1이다. 각 묶음에서 지수 $6k, 6k+2, 6k+4$는 짝수이고 $6k+3$은 홀수이므로, 각 묶음이 기여하는 값은 $1+1-1+1=2$이다. 따라서

$$\mathrm{T}_n(-1) = 2n+1 \to \infty.$$

세 경우 모두 $\mathrm{T}_n(r)$은 $+\infty$로 발산(diverge)한다. $r = -1$일 때에도 발산한다는 점에 주의하자. 지수가 3의 홀수 배인 항들이 짝수 지수의 항들을 충분히 상쇄하지 못하기 때문이다. 단지 진동하기만 하는 $1-1+1-\cdots$와 같은 단순한 교대급수(alternating series)와 대조해 보라.

검산

- S_n의 공식에 $n = 1$을 대입하면 $\frac{r(1+r)(1-r^3)}{1-r^3} = r + r^2$이 되어 올바르다.
- T_n의 극한에 $r = \frac{1}{2}$를 대입한다. 공식은 $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{64}} = \frac{92}{63} \approx 1.4603$을 주며, $T_n(\frac{1}{2})$의 항을 수백 개 직접 더해도 같은 값이 나온다.
- $r \to 1^-$일 때 T_n의 극한은 $\frac{4}{6(1-r)} = \frac{2}{3(1-r)}$처럼 행동한다. 이는 거듭제곱 여섯 개 중 네 개가 들어 있어서 전체 급수 $\frac{1}{1-r}$의 약 3분의 2가 된다는 사실과 일치한다.

흔한 실수

- 지수가 6의 배수인 항을 빼는 것을 잊는 것. 그러면 $1, r^6, r^{12}, \ldots$를 두 번 세게 된다.
- 각 등비수열의 항의 개수를 잘못 세는 것. 0부터 $6n$까지의 짝수 지수는 $3n$개가 아니라 $3n+1$개이다.
- 한 묶음의 항을 실제로 더해 보지 않고 $T_n(-1)$이 교대급수처럼 진동한다고 가정하는 것.

STEP 너머

두 집합의 원소 개수를 더한 뒤 교집합의 원소 개수를 빼서 합집합의 항을 세는 방법을 **포함-배제 원리**라 한다. 이를 생성함수(generating function)와 결합하면 조합론(combinatorics)과 정수론(number theory)의 표준적인 도구가 된다. 우리가 구한 극한은 6과 공약수를 갖는 음이 아닌 정수들의 생성함수이다. 같은 체(sieve)의 아이디어를 모든 소수(prime)에 적용하면 리만(Riemann) 제타 함수(zeta function)에 대한 오일러(Euler)의 곱 공식을 얻는다. 대학 해석학(analysis)에서는 "$|r| < 1$일 때 $r^n \to 0$"이라는 단계를 엄밀하게 다루고, 무한급수를 언제 이와 같이 재배열할 수 있는지를 묻는다. Abbott의 *Understanding Analysis*가 이 내용을 잘 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.