풀이

STEP I 1993, 문제 16

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP I 1993, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.20 절 **뷔퐁의 바늘**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/buffon.html

핵심 아이디어

이것은 뷔퐁(Buffon)의 바늘(Buffon's needle) 문제이다. 핀이 가장 가까운 직선과 교차하는지는 오직 핀의 끝이 그 직선 **쪽으로** 얼마나 뻗어 있는지에만 달려 있고, 그 뻗은 길이는 핀의 절반을 수직 방향으로 사영(projection)한 것이다. 먼저 중심까지의 거리를 고정하고 각도만으로 조건부 확률(conditional probability)을 구한 다음, 거리에 대해 평균을 낸다. 첫 번째 부분의 적분은 바로 이 평균을 낼 때 나오는 적분이며, 그래서 문제가 거기서 시작하는 것이다.

풀이

적분

$y = \cos^{-1} t$로 치환(substitution)하면 $t = \cos y$이고 $\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$이다. $t = 0$일 때 $y = \frac{\pi}{2}$이고, $t = 1$일 때 $y = 0$이다. 따라서

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 y\,(-\sin y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y.$$

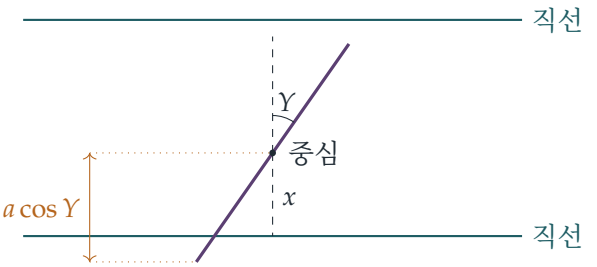
$u = y$, $\mathrm{d}v = \sin y\,\mathrm{d}y$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} y\sin y\,\mathrm{d}y &= \Big[-y\cos y\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y \\ &= 0 + \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1,\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

(다른 방법: 이 적분은 $y = \cos^{-1} t$와 두 축 사이의 넓이이고, 이는 $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$에서 $t = \cos y$ 아래의 넓이와 같은 영역이므로 $\int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y = 1$이다.)

$X = x$일 때의 확률



핀의 각 절반은 길이가 a이고 직선들에 수직인 방향과 각 Y를 이루므로, 핀의 양 끝은 중심의 양쪽으로 수직 거리 $a\cos Y$만큼 떨어져 있다. 가장 가까운 직선은 중심에서 거리 x에 있으므로, 핀이 그 직선과 교차하는 것은 정확히

$$a\cos Y \;\ge\; x.$$

일 때이다. (핀의 끝이 직선에 딱 닿는 등호의 경우는 확률이 0이므로, 이를 포함하든 안 하든 상관없다.)

? **생각해 보기** $a\cos Y \ge x$를 어떻게 Y만에 대한 조건으로 바꿀 수 있을까?

cos는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 감소하므로, x/a가 도달 가능한 값인지에 따라 달라진다.

- $x \ge a$이면 $a\cos Y \le a \le x$이고 등호는 $Y = 0$이고 $x = a$일 때만 성립하므로, 확률은 0이다.
- $0 \le x < a$이면 $\cos Y \ge x/a$는 $Y \le \cos^{-1}(x/a)$와 동치이며, 여기서 $\cos^{-1}(x/a) \in (0, \frac{\pi}{2}]$이다. Y는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로

$$\mathrm{P}(\text{교차} \mid X = x) = \frac{\cos^{-1}(x/a)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}.$$

여기서 X와 Y의 독립성(independence)을 사용했다. 즉 $X = x$임을 알아도 Y는 여전히 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포를 따른다.

일반적인 던지기에 대한 확률

이제 $a < b$라 하자. X의 확률밀도함수(probability density function)는 $[0, b]$에서 $1/b$이다. $a < b$이므로 교차가 가능한 구간 $[0, a)$는 $[0, b]$ 안에 놓이고, $[a, b]$에서는 조건부 확률이 0이다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\mathrm{P}(\text{교차}) = \int_0^b \mathrm{P}(\text{교차} \mid X = x)\, \frac{1}{b}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \int_0^a \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{a}\, \mathrm{d}x.$$

$x = at$, $\mathrm{d}x = a\, \mathrm{d}t$로 치환하고 첫 번째 부분의 결과를 이용하면

$$\mathrm{P}(\text{교차}) = \frac{2a}{\pi b} \int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. $a < b$이므로 핀은 간격 $2b$보다 짧아서 두 번째 직선에는 결코 닿을 수 없다. 따라서 "어떤 직선과 교차한다"와 "가장 가까운 직선과 교차한다"는 같은 사건이다.

검산

- $a \to b$일 때 답은 $2/\pi \approx 0.637$로 수렴(converge)하는데, 이는 당연히 1보다 작다. 간격만큼 긴 핀이라도 여전히 직선들과 거의 평행하게 놓이는 경우가 많기 때문이다.
- 답은 a에 비례한다. 짧은 핀의 길이를 두 배로 하면 교차할 확률도 두 배가 되는데, 이는 교차 횟수의 기댓값이 길이에 대해 선형이라는 사실과 맞아떨어진다.
- 실제 기하적 상황(중심은 띠 전체에서 균등, 각도도 균등)을 $a = 1$, $b = 2$로 시뮬레이션한 결과, 4×10^5번 던졌을 때 0.3183을 얻었고, 이는 $1/\pi \approx 0.31831$과 비교된다. 중점 구적법(midpoint quadrature)으로는 $\int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = 1.0000000$을 얻었다.

흔한 실수

- $a \cos Y$ 대신 $a \sin Y$를 쓰는 것: 여기서 Y는 직선 자체가 아니라 직선에 **수직인 방향**으로부터 잰 각이다.
- 공식 $\frac{2}{\pi} \cos^{-1}(x/a)$를 가지고 조건부 확률을 $[0, b]$ 전체에서 적분하는 것: 이 공식은 $x > a$에서 정의되지 않으며, 그곳에서 조건부 확률은 0이다.
- X에 대해 평균을 낼 때 확률밀도 $1/b$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

뷔퐁은 18세기에 이 문제를 제시했으며, 이는 **기하학적 확률**(geometric probability)의 고전적인 예이다. 기하학적 확률에서는 확률을 매개변수 공간, 여기서는 직사각형 $[0, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

안의 넓이로 계산한다. 답에 π가 들어 있으므로, 핀을 던지면 π에 대한 (매우 느린) 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값을 얻는다. 아름다운 확장인 "뷔퐁의 국수(Buffon's noodle)"는 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용하여, 어떤 모양의 곡선이든 교차 횟수의 기댓값이 오직 그 길이에만 달려 있음을 보여 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 연속 결합분포(joint distribution)와 이런 종류의 조건부 확률을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.