풀이

STEP I 1993, 문제 15

확률과 통계 • 베이즈 정리

> **STEP I 1993, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q15

핵심 아이디어

이 문제는 이야기로 포장한 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다. 요령은 **실제** 방향을 조건으로 놓고, 각 경우에 원주민이 내놓은 일련의 대답이 나올 가능성이 얼마나 되는지 묻는 것이다. Biscii는 언제나 거짓말을 하므로, Biscii의 반복된 대답은 언제나 서로 일치하고 언제나 틀린 방향을 가리킨다. 따라서 같은 대답이 반복될수록 상대가 Biscii일 가능성이 커지며, 바로 이 때문에 한 번 더 물어보는 것만으로 결정이 뒤집힐 수 있다.

풀이

Ascii만 생각하는 경우

Ascii는 이전 대답과 독립적으로(independent) 각 질문에 확률 $\frac{3}{4}$로 참말을 한다. 질문에 대한 대답은 두 가지(왼쪽 또는 오른쪽)뿐이므로, 두 대답이 같은 것은 두 대답이 모두 참이거나 모두 거짓일 때와 정확히 같다.

$$\mathrm{P}(\text{두 번 같은 대답}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. 이 가운데 "둘 다 참"인 경우가 $\frac{9}{16}$을 차지하므로, 조건부 확률(conditional probability)의 정의에 의해

$$\mathrm{P}(\text{참말을 함} \mid \text{두 번 같은 대답}) = \frac{9/16}{10/16} = \frac{9}{10},$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다.

"왼쪽"이라는 대답이 두 번 나온 경우

왼쪽이 올바른 방향인 사건을 L, 오른쪽이 올바른 방향인 사건을 R이라 하자. 원주민이 Ascii인 사건과 Biscii인 사건을 각각 A와 B라 하면 $\mathrm{P}(A) = \frac{11}{16}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{5}{16}$이고, 부족은 지리와 독립적으로 정해진다. 선장은 처음에 방향에 대해 아무것도 모르므로 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$로 둔다. 원주민이 "왼쪽"이라고 두 번 대답하는 사건을 E_2라 하자.

? **생각해 보기** 왜 $\mathrm{P}(L \mid E_2)$보다 $\mathrm{P}(E_2 \mid L)$을 구하기가 더 쉬운가?

실제 방향을 알고 나면 각 부족의 행동이 완전히 정해지므로, 대답이 나올 확률을 쉽게 적을 수 있다. 그런 다음 베이즈 정리로 이 조건을 뒤집는다.

왼쪽이 올바른 방향이면, Ascii가 "왼쪽"이라고 두 번 말하는 것은 두 번 모두 참말을 하는 경우이고, 그 확률은 $\frac{9}{16}$이다. Biscii라면 거짓말을 하여 "오른쪽"이라고 말할 것이므로 E_2가 일어날 수 없다. 따라서

$$\mathrm{P}(E_2 \mid L) = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{9}{16} + \tfrac{5}{16} \cdot 0 = \tfrac{99}{256}.$$

오른쪽이 올바른 방향이면, Ascii가 "왼쪽"이라고 두 번 말하는 것은 두 번 모두 거짓말을 하는 경우로 그 확률은 $\frac{1}{16}$이고, Biscii는 반드시 "왼쪽"이라고 두 번 말한다. 따라서

$$\mathrm{P}(E_2 \mid R) = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{1}{16} + \tfrac{5}{16} \cdot 1 = \tfrac{11+80}{256} = \tfrac{91}{256}.$$

L과 R의 사전확률(prior)이 같으므로 베이즈 정리에서 약분된다.

$$\mathrm{P}(L \mid E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{256}} = \frac{99}{99+91} = \frac{99}{190}.$$

이 값은 $\frac{1}{2}$보다 크므로 왼쪽이 더 가능성이 높은 방향이다. 따라서 선장은 왼쪽으로 가야 하며, 이때 옳은 방향을 택할 확률은 $\frac{99}{190}$이다.

"왼쪽"이라는 대답이 세 번 나온 경우

"왼쪽"이라는 대답이 세 번 나오는 사건을 E_3이라 하자. 같은 추론을 이번에는 Ascii의 독립적인 세 대답에 적용한다.

$$\mathrm{P}(E_3 \mid L) = \tfrac{11}{16} \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + \tfrac{5}{16} \cdot 0 = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{27}{64} = \tfrac{297}{1024},$$
$$\mathrm{P}(E_3 \mid R) = \tfrac{11}{16} \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \tfrac{5}{16} \cdot 1 = \tfrac{11}{1024} + \tfrac{320}{1024} = \tfrac{331}{1024}.$$

$\mathrm{P}(E_3 \mid R) > \mathrm{P}(E_3 \mid L)$이고 사전확률이 같으므로, 이제는 오른쪽이 더 가능성이 높은 방향이다. 정확히는

$$\mathrm{P}(R \mid E_3) = \frac{331}{297+331} = \frac{331}{628} > \frac{1}{2}.$$

따라서 선장은 **오른쪽**으로 가야 하며, 이때 옳은 방향을 택할 확률은 $\frac{331}{628}$이다.

? 생각해 보기 어떻게 세 번째 "왼쪽"이 왼쪽의 가능성을 **낮출** 수 있는가?

"왼쪽"이 하나 늘 때마다 $\mathrm{P}(E \mid L)$에서 Ascii가 기여하는 항에 $\frac{3}{4}$이 곱해진다. $\mathrm{P}(E \mid R)$에서는 Ascii 항이 $\frac{1}{4}$배로 줄어들지만 Biscii 항은 $\frac{5}{16}$에 그대로 머문다. 똑같은 대답이 길게 이어지는 것은 바로 Biscii가 만들어 내는 모습이므로, 증거는 점점 더 "이 사람은 거짓말쟁이다"라고 말하게 된다. 참말을 하는 Ascii도 일관된 대답을 하지만 그 확률은 $(\frac{3}{4})^n$에 불과하며, 이는 점점 0으로 줄어든다.

검산

- "왼쪽"이 한 번 나온 뒤의 가능도(likelihood)는 $\frac{11}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{64}$($L$이 주어졌을 때)과 $\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{31}{64}$($R$이 주어졌을 때)이므로 $\mathrm{P}(L \mid \text{왼쪽}) = \frac{33}{64}$이다. 수열 $\frac{33}{64} \approx 0.516$, $\frac{99}{190} \approx 0.521$, $\frac{297}{628} \approx 0.473$은 증가했다가 감소하며, 이는 위의 설명과 일치한다.
- 대답의 수가 많아지면 Biscii 항이 지배적이 되므로 $\mathrm{P}(L \mid E_n) \to 0$이다.
- 네 확률을 모두 분수를 이용한 정확한 열거로 확인했고, 10^6번의 대화를 시뮬레이션하여서도 확인했다. 시뮬레이션 값은 0.5214(정확한 값 $\frac{99}{190} \approx 0.5211$)와 0.5266(정확한 값 $\frac{331}{628} \approx 0.5271$)이었다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$이라는 가정을 밝히지 않는 것. 방향에 대한 사전확률이 없으면 이 문제에 답할 수 없다.
- 첫 번째 부분에서 얻은 $\frac{9}{10}$을 전체 주민에게 적용하는 것. 이 값은 Ascii에 대해서만 성립하는 명제이다. Biscii도 매번 같은 대답을 두 번 한다.
- 원주민이 **누구이든** 세 대답을 독립으로 취급하는 것. 대답들은 부족(그리고 실제 방향)을 알고 난 뒤에만 독립이며, 그래서 먼저 조건을 거는 것이다.

STEP 너머

이 계산은 베이즈 갱신(Bayesian updating)의 한 예이다. 가능도비(likelihood ratio) 또는 베이즈 인수(Bayes factor)라고 부르는 비 $\mathrm{P}(E \mid R)/\mathrm{P}(E \mid L)$은 증거가 한 가설을 얼마나 강하게 지지하는지를 나타낸다. 부족은 모든 대답이 공유하는 숨은 변수(hidden variable)이므로 대답들은 **조건부로만** 독립(conditionally independent)이며, 한쪽을 가리키는 듯한 증거가 결국 반대쪽을 가리키게 될 수도 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 조건부 확률과 바로 이런 종류의 역설을 훌륭하게 다루고 있

다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.