풀이

STEP I 1993, 문제 13

역학 • 일과 일률

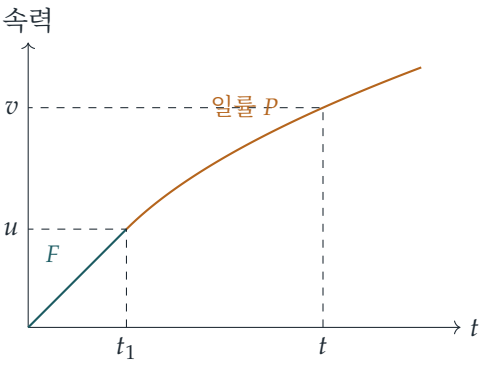
> **STEP I 1993, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q13

핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어지며, 각 단계마다 그에 맞는 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)의 형태가 필요하다. 힘이 일정한 동안에는 가속도도 일정하므로 **등가속도 공식**(*suvat*)으로 모든 것을 해결할 수 있다. 기관이 일정한 일률(power)로 작동하기 시작하면 구동력은 P/v가 되어 속력에 따라 변한다. 이때의 요령은 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$(시간을 구할 때) 또는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$(거리를 구할 때)로 써서 변수가 분리되도록(separation of variables) 하는 것이다.

풀이

기관차와 열차를 합쳐 질량이 M인 하나의 입자로 보고, 저항이 없는 수평 직선 선로를 따라 움직인다고 모형화한다. 수평 방향의 힘은 견인력(tractive force)뿐이다(무게와 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이며 서로 상쇄된다). 그림은 시간에 대한 속력의 개형을 나타낸다. 속력 u까지는 직선이고, 그 뒤로는 속력이 커질수록 기울기가 작아지는 곡선이다.



1단계: 일정한 힘

힘 F가 일정하면 가속도는 F/M이다. 정지 상태에서 출발하므로, $F = P/u$를 이용하면 속력이 u에 이르는 시각은

$$t_1 = \frac{Mu}{F} = \frac{Mu^2}{P},$$

이다. $v^2 = u^2 + 2as$(여기서는 0에서 u까지)에 의해 이동한 거리는

$$s_1 = \frac{u^2}{2F/M} = \frac{Mu^2}{2F} = \frac{Mu^3}{2P}.$$

2단계: 일정한 일률

일률은 힘과 속도의 곱이므로, 속력이 w일 때 견인력은 P/w이다. $w = u$일 때 이 값은 $P/u = F$이므로, 기관의 작동 방식이 바뀔 때 힘이 갑자기 변하지 않는다는 점에 주목하자. 뉴턴의 제2법칙에 의해

$$M\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{w}.$$

시간. 변수를 분리하면 $Mw\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}t$이다. 시각 t_1에서의 속력 u부터 시각 t에서의 속력 v까지 적분하면

$$\frac{M}{2}\left(v^2 - u^2\right) = P\,(t - t_1).$$

(이것은 바로 일-에너지 원리(work–energy principle)이다. 기관이 한 일 $P(t - t_1)$이 모두 운동 에너지(kinetic energy)가 된다.) 따라서

$$t = \frac{Mu^2}{P} + \frac{M}{2P}\left(v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(2u^2 + v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(u^2 + v^2\right),$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. $v \geq u$이므로 속력 v는 2단계에서(또는 정확히 2단계가 시작될 때) 도달되며, 그렇기 때문에 2단계의 방정식을 사용할 수 있다.

생각해 보기 거리를 구하려면 t가 아니라 x를 독립변수(independent variable)로 삼아야 한다. 가속도를 어떻게 다시 써야 할까?

연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$이다. 따라서 운동방정식(equation of motion)은 다음과 같이 된다.

$$Mw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{w}, \qquad \text{즉,} \qquad Mw^2\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}x.$$

거리. $w = u$부터 $w = v$까지 적분하면, 2단계에서 이동한 거리 s_2는 다음을 만족한다.

$$\frac{M}{3}\left(v^3 - u^3\right) = P\,s_2, \qquad s_2 = \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right).$$

따라서 전체 이동 거리는

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{Mu^3}{2P} + \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(3u^3 + 2v^3 - 2u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right). \end{aligned}$$

시험지의 오타. 인쇄된 답에는 u^3 대신 u^2이 적혀 있다. 이는 옳을 수 없다. Mv^3/P는 길이이고(일률의 단위는 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$이며 Mv^3의 단위는 $\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}$이다), 반면 Mu^2/P는 시간이므로, 두 항을 더하려면 u가 들어간 항도 세제곱이어야 한다. 올바른 거리는 $\dfrac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right)$이며, 이것이 바로 우리가 보인 결과이다.

검산

- $v = u$로 두면 시간 공식은 $Mu^2/P = Mu/F$, 거리 공식은 $Mu^3/(2P) = Mu^2/(2F)$가 되어, 마땅히 그래야 하듯 1단계의 결과와 정확히 일치한다.
- 단위(units): Mv^2/P는 에너지를 일률로 나눈 것이므로 시간이고, Mv^3/P는 길이이다. 오타는 바로 여기서 드러난다.
- $M = F = u = 1$(따라서 $P = 1$)이고 $v = 2$일 때, 공식은 $t = 2.5$, 거리 $17/6 \approx 2.833$을 준다. 운동을 수치적으로 단계별 계산하면(속력 u 미만에서는 힘 F, 그 이상에서는 P/w) 두 값이 모두 재현되며, 임의의 M, F, u와 $v \geq u$에 대해서도 공식과 10^{-7}보다 작은 오차로 일치한다. 반면 인쇄된 u^2 형태는 일치하지 않는다.

흔한 실수

- 1단계를 잊고 일정한 일률에 대한 방정식을 정지 상태부터 적분하는 것. 2단계의 방정식은 $w \geq u$일 때에만 성립한다. $w = 0$부터 적용하면 힘이 무한대가 되어야 한다.
- x에 대해 적분하면서 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$를 사용하는 것. 거리를 구할 때에는 가속도를 $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$로 써야 한다.
- 1단계의 시간을 u/F로 쓰는 것. 가속도는 F가 아니라 F/M이다.

STEP 너머

일정한 일률 단계는 변수분리로 푸는 1계 미분방정식(differential equation)이며, 독립변수를 t에서 x로 바꾸는 것은 에너지 방법 전반에서 쓰이는 것과 같은 요령이다. $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$를 적분하면 운동 에너지가 나오고, 이는 일-에너지 정리로, 나아가 퍼텐셜(potential)과 보존량(conserved quantity)으로 이어진다. 저속에서 힘에 상한을 두는 것은 실제 견인 방식이기도 하다. 일정한 일률의 전동기는 정지 상태에서 무한히 큰 힘을 낼 수 없기 때문이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 흐름을 따라 일, 에너지, 일률을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.