풀이

STEP I 1993, 문제 12

역학 • 포물체 요격

> **STEP I 1993, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q12

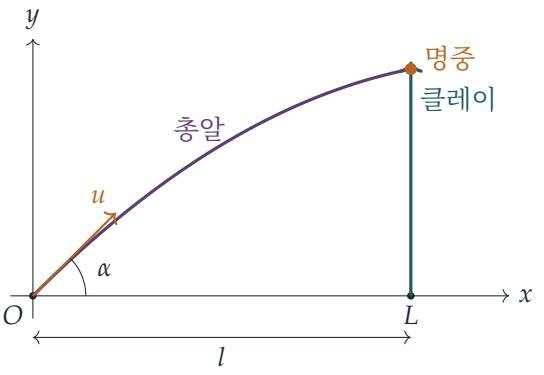
핵심 아이디어

명중한다는 것은 총알과 클레이가 같은 순간에 같은 위치에 있다는 뜻이다. 총알이 발사기를 지나는 연직선에 도달하는 시각은 수평 운동만으로 정해지므로, 먼저 그 시각을 구한 다음 두 높이를 맞춘다. 총알이 날아가는 동안 중력(gravity)은 두 물체를 정확히 같은 양 $\frac{1}{2}gt^2$만큼 끌어내리므로, 이 항은 소거되고 깔끔한 일차 조건이 남는다. $T = 0$일 때 이 소거는 문제 전체를 간결하게 해석하는 방법을 준다.

풀이

모형

클레이와 총알을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자(particle)로 보고, 사수는 발사기를 포함하는 연직 평면 안에서 발사기 쪽으로 쏜다고 가정한다. 사수를 원점 O에 두고, x축은 수평으로 $x = l$에 있는 발사기 L 쪽을 향하게, y축은 연직 위쪽을 향하게 잡는다. 시각 t는 소총을 쏜 순간부터 잰다. 따라서 클레이는 이미 시간 T 동안 공중에 있었고, 시각 t에는 $T + t$ 동안 날아간 상태이다.



명중 조건

발사 후 시각 t에 총알의 위치는

$$x_B = (u\cos\alpha)\,t, \qquad y_B = (u\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

이고, 시간 T만큼 먼저 속력 v로 위로 출발한 클레이는 $x = l$에 있으며 그 높이는

$$y_C = v(T+t) - \tfrac{1}{2}g(T+t)^2 = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 총알은 직선 $x = l$ 위에서만 클레이와 만날 수 있고, $(u\cos\alpha)\,t = l$일 때, 즉

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha}.$$

일 때 그곳에 도달한다. (여기서 $\cos\alpha > 0$이다. $l > 0$이므로 바로 위를 향한 소총은 발사기에 결코 도달하지 못한다.) 명중하려면 이 순간에 $y_B = y_C$여야 한다. $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거되므로

$$(u\sin\alpha)\,t = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t.$$

이다. $t = l/(u\cos\alpha)$를 대입하면

$$\frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + \frac{(v-gT)\,l}{u\cos\alpha},$$

이고, 양변에 $\cos\alpha$를 곱하면

$$l\sin\alpha - \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right)\cos\alpha = \frac{v-gT}{u}\,l,$$

이 되어 구하는 결과를 얻는다.

$T = 0$인 경우

$T = 0$이면 조건은 $l\sin\alpha = vl/u$가 되고, $l > 0$이므로

$$\sin\alpha = \frac{v}{u}.$$

이다.

? 생각해 보기 왜 이로부터 $v \le u$가 아니라 $v < u$가 반드시 성립해야 하는가?

$\sin\alpha \le 1$이어야 하므로 $v \le u$이다. 그런데 $v = u$이면 $\alpha = \frac{\pi}{2}$여야 하고, 그러면 $\cos\alpha = 0$이다. 즉 총알은 O에서 바로 위로 올라가 직선 $x = l$에 결코 도달하지 못한다. 따라서 명중은 $v < u$일 때만 가능하다. 이때

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

이며, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이므로 양의 제곱근을 택했다. 명중은

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

에 일어난다. 클레이는 $t = 0$부터 다시 $vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$이 될 때까지, 즉 $t = 2v/g$까지 공중에 있다. 따라서 클레이가 떨어지기 전에 맞히려면

$$\frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} < \frac{2v}{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2v\sqrt{u^2 - v^2}}{g} > l,$$

이어야 한다. 여기서 양수 $\sqrt{u^2 - v^2}$를 곱했다. $v < u$와 함께 이것이 보여야 할 내용이다.

$T = 0$인 경우를 보는 멋진 방법이 있다. $\sin\alpha = v/u$이면 총알의 속도의 연직 성분은 $u\sin\alpha = v$로 클레이의 것과 같고, 둘은 같은 중력을 받는다. 그러므로 총알과 클레이는 **매 순간 같은 높이에** 있으며, 남은 문제는 총알의 수평 속력 $\sqrt{u^2 - v^2}$로 클레이가 떨어지기 전에 거리 l을 갈 수 있는지뿐이다.

검산

- **중력이 없는 극한.** $g = 0$이고 $T = 0$이면 두 물체는 모두 직선으로 움직이며, 조건 $\sin\alpha = v/u$는 등속도 운동에서의 요격에 대한 통상적인 "앞질러 겨냥하기" 조건일 뿐이다.
- **최대 사정거리.** u를 고정하면 상계 $2v\sqrt{u^2 - v^2}/g$는 $v = u/\sqrt{2}$일 때 가장 크고, 그 값은 u^2/g로 속력 u로 발사한 포물체의 최대 사정거리(maximum range)와 같다. 이는 이치에 맞다. $v = u/\sqrt{2}$이면 $\alpha = 45°$이고, 명중은 총알이 막 지면으로 돌아오는 순간에 일어난다.
- **수치.** $g = 9.8$, $v = 20$, $T = 0.7$, $u = 120$, $l = 60$ (SI 단위)으로 두고 명중 각도를 수치적으로 구하면 $\alpha \approx 0.2987$ rad이며, 첫 번째 항등식의 양변이 일치한다. 두 운동을 시간에 따라 단계적으로 진행시켜 보면, 총알이 발사기에 도달할 때 총알과 클레이는 모두 높이 17.13 m에 있다. $T = 0$, $v = 20$, $u = 100$이면 상계는 약 400 m이고 $\alpha \approx 11.5°$이다.

흔한 실수

- 지연 시간 T를 고려하지 않고 두 물체에 같은 시간 변수를 쓰는 것. 클레이의 높이에는 $T + t$를 써야 한다.
- $v = u$를 배제하는 것을 잊는 것. 이 경우 $\alpha = 90°$가 되어 전혀 명중하지 않는다.
- 총알이 발사기에 도달하는지만 확인하고, 그 순간 클레이가 아직 공중에 있는지는 확인하지 않는 것.

STEP 너머

$\frac{1}{2}gt^2$의 소거는 깊은 아이디어의 특수한 경우이다. 가속도 g로 자유 낙하하는 좌표계에서는 중력이 사라지고 모든 포물체가 등속도로 직선 운동을 한다. 이것은 가속하는 좌표계에 적용한 갈릴레이 상대성(Galilean relativity)이며, 아인슈타인(Einstein)의 손에서 일반 상대성 이론(general relativity)의 핵심인 등가 원리(equivalence principle)가 되었다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 비관성 좌표계(non-inertial frame)를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.