풀이

# STEP I 1993, 문제 11

역학 • 질량중심

> **STEP I 1993, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q11

## 핵심 아이디어

한 점에 자유롭게 매달린 강체(rigid body)에는 단 두 힘, 즉 받침점이 당기는 힘과 무게만 작용한다. 두 힘이 평형을 이루려면 같은 직선 위에서 작용해야 하므로, 무게중심(centre of mass)은 받침점의 바로 아래에 매달려야 한다. 따라서 모든 것은 구부린 철사의 무게중심 $G$를 구하고, 두 위치 사이에서 물체가 직선 $GA$와 $GB$ 사이의 각만큼 회전한다는 것을 알아차리는 데로 귀결된다.

## 풀이

### 무게중심

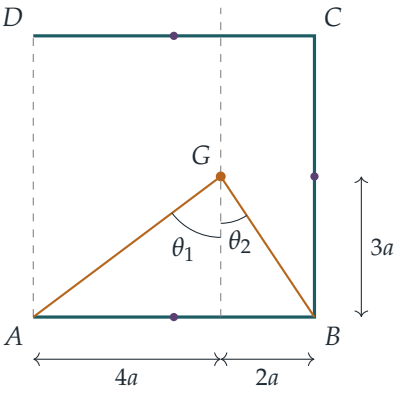
철사를 세 변 $AB$, $BC$, $CD$로 구부린 균일한 강체 막대로 모형화하자. 각 변의 무게는 모두 $W$로 같고, 철사는 매끄러운 못이나 가벼운 줄에 매달려 있다. 수가 정수가 되도록 정사각형의 한 변의 길이를 $6a$로 잡고, 철사가 놓인 평면에 다음과 같이 좌표축을 설정한다.

$$A = (0,0), \quad B = (6a,0), \quad C = (6a,6a), \quad D = (0,6a).$$

각 변은 균일한 막대이므로 그 무게는 중점에 작용한다. 즉 $AB$는 $(3a,0)$, $BC$는 $(6a,3a)$, $CD$는 $(3a,6a)$에서 작용한다. 세 무게가 같으므로 $G$는 세 중점의 평균이다.

$$G = \left(\frac{3a+6a+3a}{3}, \frac{0+3a+6a}{3}\right) = (4a,\, 3a).$$

($BC$와 $AD$의 중점을 지나는 직선에 대한 대칭성에 의해 $G$는 높이 $3a$에 있어야 했다. 계산이 필요했던 것은 가로 위치뿐이다.)




그림에서 $G$를 지나는 수직 점선은 $BC$(그리고 빠진 변 $AD$)와 평행하다. $GA$가 이 점선과 이루는 각을 $\theta_1$, 반대쪽에서 $GB$가 이 점선과 이루는 각을 $\theta_2$라 하자. 그림에서 읽으면

$$\tan\theta_1 = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

(실제로 $AG = 5a$이다. 3–4–5 삼각형이다.)

### $A$에 매달 때와 $B$에 매달 때

철사가 $A$에 매달려 평형 상태에 있을 때, 철사에 작용하는 힘은 $A$에서의 반작용력과 $G$에 작용하는 전체 무게 $3W$뿐이다. 이 두 힘이 평형을 이루려면 $A$에 대한 모멘트(moment)가 상쇄되어야 하므로, 무게의 작용선은 $A$를 지나야 한다. 즉 직선 $AG$는 연직이고 $G$는 $A$의 아래에 있다. $BC$는 그림의 점선과 평행하므로, 이제 $BC$는 연직선에 대해 $\theta_1$만큼 기울어져 있다.

마찬가지로 철사를 $B$에 매달면 직선 $BG$가 연직이 되고, $BC$는 연직선에 대해 반대 방향으로 $\theta_2$만큼 기울어진다.

> ? **생각해 보기** $BC$의 두 방향 사이의 각이 $\theta_1 - \theta_2$가 아니라 $\theta_1 + \theta_2$인 이유는 무엇인가?

첫 번째 위치에서 두 번째 위치로 갈 때 철사는 강체로서 회전하므로, 철사 안의 모든 직선이 같은 각만큼 회전한다. 같은 말이지만, 철사를 종이 위에 고정해 두고 대신 "아래쪽" 방향이 회전한다고 생각해도 된다. 첫 번째 위치에서 아래쪽은 $GA$ 방향이고, 두 번째 위치에서는 $GB$ 방향이다. 따라서 회전한 각은 이 둘 사이의 각 $AGB$이다. 그림에서 $A$와 $B$는 $G$를 지나는 점선의 서로 반대쪽에 있으므로

$$\angle AGB = \theta_1 + \theta_2.$$

덧셈정리(addition formula)를 이용하면

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{9}}=\frac{2}{\frac{1}{9}}=18.$$

$\theta_1$과 $\theta_2$는 모두 예각이므로 $0<\theta_1+\theta_2<180°$이고, 그 탄젠트 값이 양수이므로 합은 실제로 예각이다. 따라서 $BC$의 두 방향 사이의 각은 요구한 대로 $\tan^{-1}18$이다.

## 검산

- 수치로 확인하면 $\theta_1=\tan^{-1}\frac{4}{3}\approx53.13°$, $\theta_2=\tan^{-1}\frac{2}{3}\approx33.69°$이고, 더하면 $86.82°$이다. $\tan^{-1}18\approx86.82°$도 같다.
- 철사를 90 000개의 작고 같은 조각으로 바꾸어 그 위치를 평균하여 $G=(4a,3a)$를 얻고, 매번 $G$가 받침점 아래에 오도록 물체 전체를 회전시키면, $BC$의 두 상 사이의 각이 소수점 아래 아홉째 자리까지 같게 나온다.
- $G$에 대한 타당성 확인: $G$는 빠진 변 $AD$보다 $BC$에 더 가까이 있는데, 오른쪽에는 철사가 모두 있고 왼쪽에는 하나도 없으므로 당연히 그래야 한다.

## 흔한 실수

- $G$를 정사각형의 중심 $(3a,3a)$로 잡는 실수. 네 변이 모두 있다면 맞겠지만, 빠진 변 $AD$는 무게중심을 왼쪽으로 전혀 끌어당기지 않는다.
- 두 기울기를 더하지 않고 빼는 실수. $A$에 매달면 $BC$가 한쪽으로 기울고, $B$에 매달면 반대쪽으로 기운다.

## STEP 너머

"자유롭게 매달린 물체는 무게중심이 받침점 아래에 오도록 매달린다"는 원리는 실제로 다루기 까다로운 평면 도형의 무게중심을 찾는 방법이기도 하다. 도형을 두 점에서 각각 매달아 보고 두 연직선(plumb line)이 만나는 곳을 찾으면 된다. 대학 1학년 과정에서는 같은 아이디어가 위치 에너지(potential energy)를 통해 나타난다. 평형 위치는 $G$의 높이의 정류점(stationary point)이고, 안정한 평형 위치는 가장 낮은 곳이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 무게중심과 강체의 정역학을 이와 같은 예제를 훨씬 많이 들어 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.