풀이

STEP I 1993, 문제 10

역학 • 용수철이 있는 평형

STEP I 1993, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

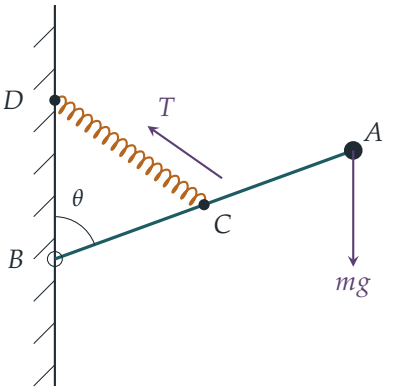
step.maths.org/questions/93-s1-q10

핵심 아이디어

경첩(hinge) B에 대한 모멘트(moment)를 구한다. 그러면 B에서의 미지의 반작용력이 완전히 사라지고, 용수철의 장력과 막대의 각을 잇는 방정식 하나만 남는다. 기하는 보기보다 다루기 쉽다. $BD = BC = a$이므로 삼각형 BCD는 이등변삼각형(isosceles triangle)이고, 그 안의 모든 길이를 B에서의 각의 절반으로 나타낼 수 있기 때문이다.

풀이

램프는 질점(particle)으로, 막대는 가볍고 강체인 것으로, B의 경첩은 매끄러운 것으로, 용수철은 가볍고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화한다. $\theta = \angle DBA$, 즉 막대와 위쪽 연직선 BD 사이의 각이라 하자. "벽에서 떨어져 있다"는 것은 $0 < \theta < \pi$를 뜻한다. $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$이면 막대가 벽을 따라 놓이기 때문이다.



용수철의 길이

$BC = BD = a$이고 두 변 사이의 각이 θ이므로 삼각형 BCD는 이등변삼각형이다. B에서 CD에 수선을 내리면 이 수선은 각 θ와 변 CD를 모두 이등분하므로

$$CD = 2a\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad B\text{에서 직선 } CD\text{까지의 거리} = a\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

훅의 법칙에 의해 용수철의 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda}{a}\left(2a\sin\tfrac{\theta}{2} - a\right) = \lambda\left(2\sin\tfrac{\theta}{2} - 1\right)$$

이다. 여기서 T가 음수이면 용수철이 압축되어 밀고 있다는 뜻이다.

B에 대한 모멘트

막대와 램프로 이루어진 계에 작용하는 힘은 A에서의 무게 mg, C에서 CD 방향으로 작용하는 용수철의 힘 T, 그리고 B에서의 반작용력이며, 반작용력은 B에 대한 모멘트가 없다. 무게는 벽에서 수평 거리 $2a\sin\theta$인 곳에서 연직으로 작용하며, 막대를 아래로 돌린다(θ가 증가한다). 장력은 C를 D 쪽으로 당겨 막대를 다시 벽 쪽으로 돌린다. 평형(equilibrium)이려면

$$T \cdot a\cos\tfrac{\theta}{2} = mg \cdot 2a\sin\theta = 4mga\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

$0 < \theta < \pi$에서 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$T = 4mg\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

특히 $T > 0$이다. 즉 용수철은 늘어나 있어야 한다. 무언가가 램프를 받쳐 들고 있어야 하므로 이는 당연하다.

생각해 보기 이제 T에 대한 식이 두 개 있다. 두 식을 같다고 놓으면 무엇을 얻는가? 그리고 그 답이 막대의 실제 위치를 나타내려면 무엇이 성립해야 하는가?

$s = \sin\frac{\theta}{2}$라 하자. T에 대한 두 식을 같다고 놓으면

$$\lambda(2s-1) = 4mgs \quad\Longrightarrow\quad s(2\lambda - 4mg) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}$$

이다. 단, $\lambda \neq 2mg$이어야 한다($\lambda = 2mg$이면 방정식이 $0 = \lambda$가 되어 불가능하다). $0 < \theta < \pi$이므로 실제 위치가 되려면 $0 < s < 1$이어야 한다.

- $\lambda < 2mg$이면 $s < 0$이므로 해가 없다.
- $\lambda > 2mg$이면 $s > 0$이고,

$$s < 1 \iff \lambda < 2\lambda - 4mg \iff \lambda > 4mg.$$

따라서 $\lambda > 4mg$이면 값 $s = \lambda/\big(2(\lambda - 2mg)\big)$는 0과 1 사이에 엄격히 놓이고, 모멘트가 평형을 이루는 각 $\theta \in (0, \pi)$가 정확히 하나 존재한다. (실제로 $s > \frac{1}{2}$이므로 용수철은 정말로 늘어나 있다.) 이때 합력은 B에서의 반작용력이 감당하므로, 요구한 대로 램프는 벽에서 떨어진 채 평형을 이루며 매달려 있을 수 있다. 역으로 $\lambda \leq 4mg$이면 그러한 위치는 존재하지 않는다.

그 각은

$$\angle DBA = \theta = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}\right)$$

이고, $\cos\theta = 1 - 2s^2$이므로 동치로

$$\cos\angle DBA = 1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 2mg)^2}$$

이다.

검산

- $\lambda \to \infty$이면 용수철이 늘어날 수 없으므로 $CD \to a$이고 삼각형 BCD는 정삼각형이 된다. 공식에서 $s \to \frac{1}{2}$이므로 $\theta \to 60^\circ$이다. ✓
- 위쪽에서 $\lambda \to 4mg$이면 $s \to 1$이고 $\theta \to 180^\circ$이다. 용수철이 너무 약해서 램프가 아래로 처져 벽에 붙어 매달리게 된다.
- $\lambda = 6mg$이면 $s = \frac{3}{4}$, $\cos\theta = -\frac{1}{8}$이므로 $\theta \approx 97.2^\circ$이다. 이 각을 완전한 벡터 모멘트 방정식(용수철의 힘은 좌표로 계산)에 대입하면 알짜 모멘트가 0이 된다. $0 < \theta < \pi$에서 알짜 모멘트를 수치적으로 훑어보면 $\lambda > 4mg$일 때 근이 하나뿐이고(예를 들어 $\lambda = 5mg$일 때 112.9°), $\lambda \leq 4mg$일 때는 근이 없다.

흔한 실수

- B에서 용수철 힘의 작용선까지의 거리로 a 대신 막대 전체의 길이 $2a$를 쓰는 것. 수직 거리는 $a\cos\frac{\theta}{2}$이다.
- 모멘트를 구하는 대신 힘을 분해하는 것. 이렇게 하면 아무 이득 없이 B에서의 반작용력의 미지 성분 두 개가 끼어든다.
- $0 < \sin\frac{\theta}{2} < 1$인지 확인하는 것을 잊는 것. 조건 $\lambda > 4mg$는 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

이 문제는 평형이 존재하는지만 묻는다. 자연스러운 다음 질문은 그 평형이 **안정**(*stable*)한가, 즉 살짝 건드렸을 때 그 흔들림이 잦아드는가 아니면 커지는가이다. 이 질문에는 퍼텐셜 에너지(potential energy) $V(\theta)$(중력 에너지와 탄성 에너지의 합)를 쓰고 평형점에서 $V''(\theta)$의 부호를 살펴봄으로써 답할 수 있다. 이 아이디어는 대학 1학년 역학 전반에 걸쳐, 그리고 나중에는 역학계(dynamical systems) 전체에 걸쳐 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 에너지 방법과 안정성을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.