풀이

STEP I 1993, 문제 1

순수수학 • 주사위 눈의 합 세기

> **STEP I 1993, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q1

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.6 절 **이상한 주사위**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/strange-dice.html

핵심 아이디어

모든 면의 색이 서로 다르므로, 어떤 합을 던지는 하나의 "방법"은 각 주사위에서 면을 하나씩 고르는 것이다. 한 주사위에 k가 적힌 면이 a_k개, 다른 주사위에 b_k개 있다면, 합 n을 던지는 방법의 수는

$$N(n) = \sum_{i+j=n} a_i\, b_j.$$

이다. 둘째 부분에서는 표를 가장 작은 합부터 차례로 읽어 올라간다. 새로운 합이 나올 때마다 아직 만나지 않은 미지수가 하나나 둘만 새로 등장하므로, 면의 개수가 하나씩 강제로 정해지고, 그 과정에서 나타나는 몇 안 되는 갈래만 배제하면 된다.

풀이

합이 6인 경우

첫째 주사위에서 개수는 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_6 = 1$이다. 둘째 주사위에서는 $b_1 = 1, b_3 = 2, b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$이다. 합이 6이 되려면 첫째 주사위가 1, 2, 3 중 하나를 보여야 한다. 6이 나오면 둘째 주사위에 0이 있어야 하기 때문이다. 따라서

$$N(6) = a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7,$$

이고, 이것이 요구된 일곱 가지 방법이다.

새로운 번호 매기기 찾기

두 주사위를 P와 Q라 하자. $k = 1, \ldots, 6$에 대하여 P에는 k가 적힌 면이 a_k개, Q에는 b_k개 있다고 하자. 이들은 음이 아닌 정수이고

$$a_1 + \cdots + a_6 = b_1 + \cdots + b_6 = 6.$$

을 만족한다. (간단한 확인으로, 표의 항목을 모두 더하면 $36 = 6 \times 6$이 된다.)

합 2와 3. $N(2) = a_1 b_1 = 0$이므로 두 주사위가 모두 1을 가질 수는 없다. 그런데 $N(3) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2$이므로 어느 한 주사위에는 1이 있다. 그 주사위를 P라 하자. 그러면 $a_1 \geq 1$이고 $b_1 = 0$이며

$$N(3) = a_1 b_2 = 2, \qquad \text{따라서} \qquad (a_1, b_2) = (2, 1) \text{ 또는 } (1, 2).$$

$a_1 = 2$, $b_2 = 1$인 경우는 불가능하다. Q에는 1이 없으므로 $N(7) \geq a_1 b_6 = 2b_6$이고, $N(7) = 3$에서 $b_6 \leq 1$이다. 이 경우 Q에는 2가 적힌 면이 하나 있으며, 3이나 4가 없음을 확인해 보자.

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = 2b_3 + a_2 = 1$이므로 $2b_3 \leq 1$이고, 따라서 $b_3 = 0$, 이어서 $a_2 = 1$이다.
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2b_4 + 0 + a_3 = 1$이므로 $b_4 = 0$이고 $a_3 = 1$이다.

따라서 Q에는 2가 하나 있고 1, 3, 4는 없으며, 나머지 다섯 면은 5와 6이다. 즉 $b_5 + b_6 = 5$이다. $b_6 \leq 1$이므로 $b_5 \geq 4$이고, 그러면

$$N(6) \geq a_1 b_5 = 2b_5 \geq 8,$$

이 되어 $N(6) = 4$에 모순(contradiction)이다. 따라서 이 경우는 일어날 수 없다.

따라서 $a_1 = 1$이고 $b_2 = 2$이다. 이제 $b_1 = 0$임을 기억하면서 표를 따라 올라간다.

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = b_3 + 2a_2 = 1$. $2a_2$는 짝수이므로 $a_2 = 0$, $b_3 = 1$이다.
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_4 + 0 + 2a_3 = 1$. 같은 방법으로 $a_3 = 0$, $b_4 = 1$이다.
- $N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$.

지금까지 Q의 면 중 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$개가 정해졌으므로 $b_5 + b_6 = 2$이다. $b_5 = 4 - 2a_4$에서 b_5는 짝수이므로 $b_5 = 0$ 또는 $b_5 = 2$이다.

생각해 보기 $b_5 = 0$과 $b_5 = 2$ 중 어느 쪽인지 어떻게 결정할까?

다음 합을 이용한다. P에는 2나 3이 없고 Q에는 1이 없으므로

$$N(7) = a_1b_6 + a_4b_3 + a_5b_2 = b_6 + a_4 + 2a_5 = 3.$$

- $b_5 = 0$이면 $a_4 = 2$이고 $b_6 = 2$이다. 그러면 $N(7) \geq b_6 + a_4 = 4 > 3$이 되어 불가능하다.
- $b_5 = 2$이면 $a_4 = 1$이고 $b_6 = 0$이다. 그러면 $N(7) = 0 + 1 + 2a_5 = 3$에서 $a_5 = 1$이다. P의 면 중 $a_1 + a_4 + a_5 = 3$개가 정해졌으므로 $a_6 = 3$이다.

표에 의해 모든 것이 강제로 정해졌다.

$$P:\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6 \qquad\qquad Q:\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5.$$

표의 나머지 확인하기. 합 2부터 7까지만 사용했으므로, 이 번호 매기기가 나머지 항목도 만들어 내는지 확인해야 한다. $a_1 = a_4 = a_5 = 1, a_6 = 3$이고 $b_2 = 2, b_3 = b_4 = 1, b_5 = 2$일 때

$$\begin{aligned} N(8) &= a_4b_4 + a_5b_3 + a_6b_2 = 1 + 1 + 6 = 8, \\ N(9) &= a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_3 = 2 + 1 + 3 = 6, \\ N(10) &= a_5b_5 + a_6b_4 = 2 + 3 = 5, \\ N(11) &= a_6b_5 = 6, \\ N(12) &= a_6b_6 = 0. \end{aligned}$$

이 값들은 모두 표와 일치한다. 따라서 두 주사위는 반드시 $1,4,5,6,6,6$과 $2,2,3,4,5,5$로 번호가 매겨져야 하고, 이 번호 매기기는 실제로 표를 만들어 낸다. 어느 주사위를 어떻게 부르는지 바꾸는 것을 제외하면, 이것이 가능한 유일한 번호 매기기이다.

검산

- $1,4,5,6,6,6$과 $2,2,3,4,5,5$에 대한 6×6 합의 표를 그리고 각 합의 개수를 세어 보라. $0,2,1,1,4,3,8,6,5,6,0$이 나와야 한다.
- 두 주사위에 1부터 6까지의 수를 매기는 모든 방법(주사위 하나당 462개의 중복집합(multiset)이 있다)을 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 한 쌍만 찾아지며, 이로써 풀이가 유일함이 확인된다.

흔한 실수

- 표에 맞는 번호 매기기를 추측하고 거기서 멈추는 것. 문제는 추론을 요구하므로, 표가 번호 매기기를 강제한다는 것을 보여야 한다.

- $a_1 = 2, b_2 = 1$인 경우를 잊어버리거나, 이유 없이 배제하는 것.
- 작은 합들로부터 면의 개수를 정해 놓고, 합 8부터 12까지를 전혀 확인하지 않는 것.

STEP 너머

$N(n)$을 깔끔하게 정리하는 방법은 생성함수(generating function)를 쓰는 것이다. $p(x) = \sum a_k x^k$, $q(x) = \sum b_k x^k$라 하면 $p(x)q(x)$에서 x^n의 계수(coefficient)가 정확히 $N(n)$이므로, 이 문제는 주어진 다항식을 특정한 꼴의 두 조각으로 인수분해(factorise)하라는 것이다. 같은 아이디어로 **시커먼 주사위**(*Sicherman dice*) $1,2,2,3,3,4$와 $1,3,4,5,6,8$을 얻는데, 이 주사위들은 보통의 주사위 두 개와 같은 합의 분포(distribution)를 가진다. Herbert Wilf의 *generatingfunctionology*(생성함수론)는 이 방법을 생기 있게 소개하는 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.