풀이

STEP III 1992, 문제 9

순수수학 • 타원의 극방정식

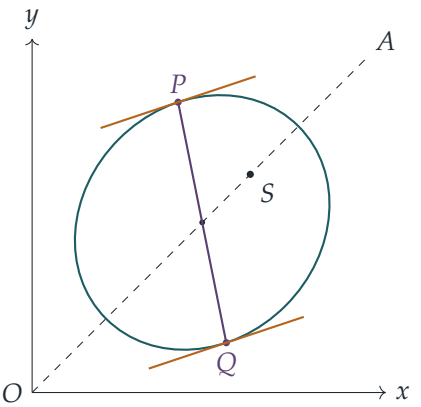
STEP III 1992, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q9

핵심 아이디어

극좌표(polar coordinates)는 S를 기준으로 하고 시초선(initial line)이 $y = x$ 방향을 향하도록 잡으므로, 극각이 θ인 점은 S에서 보아 데카르트 좌표계의 방향각이 $\theta + \frac{\pi}{4}$이다. x와 y를 θ의 함수로 쓰고 미분하면 기울기(gradient)를 얻는다. 두 번째 부분에서 실제로 쓸 수 있는 지름(diameter)의 성질은 타원(ellipse)이 그 중심에 대하여 대칭이라는 것이다. 즉 지름의 양 끝에서의 접선(tangent)은 **평행**하다. 그러므로 두 기울기를 같다고 놓고, 나머지는 반각(half-angle) 삼각함수 공식에 맡긴다.



그림($e = \frac{1}{2}$)에서 PQ는 중심을 지나는 지름이고, P와 Q에서의 접선은 평행하다.

풀이

접선의 기울기

S는 제1사분면에서 직선 $y = x$ 위에 있으므로, S를 점 (s, s) (단, $s > 0$)라 하자. SA 방향의 단위벡터(unit vector)는 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$이고, 이는 x축과 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이룬다. 따라서 S에 대한 극좌표가 (r, θ)인 점은

$$x = s + r\cos\phi, \qquad y = s + r\sin\phi, \qquad \text{단, } \phi = \theta + \tfrac{\pi}{4}.$$

E 위에서는 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$이므로

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r\,e\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$를 r'으로 쓰고 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = 1$을 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\phi - r\sin\phi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'\sin\phi + r\cos\phi.$$

중요한 것은 비뿐이므로, 두 식에 양수 $(1 + e\cos\theta)/r$를 곱한다.

$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\cos\phi - (1+e\cos\theta)\sin\phi = e\sin(\theta-\phi) - \sin\phi = -\tfrac{e}{\sqrt{2}} - \sin\phi,$$
$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\sin\phi + (1+e\cos\theta)\cos\phi = e\cos(\theta-\phi) + \cos\phi = \tfrac{e}{\sqrt{2}} + \cos\phi,$$

여기서 $\theta - \phi = -\frac{\pi}{4}$임을 이용하였다. 이제 $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$이고 $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - \sin\theta)$이다. 전체에 $\sqrt{2}$를 곱하면, $\theta = \alpha$에서의 접선 벡터(tangent vector)는

$$\mathbf{d}(\alpha) = (-(\sin\alpha + \cos\alpha + e),\ \cos\alpha - \sin\alpha + e). \qquad (*)$$

따라서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha + e}{-(\sin\alpha + \cos\alpha + e)} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha - e}{\sin\alpha + \cos\alpha + e}$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. ($\sin\alpha + \cos\alpha + e = 0$인 곳에서는 접선이 수직이며, 그곳에서도 $(*)$는 여전히 성립한다.)

지름의 양 끝

생각해 보기 중심을 구하지 않은 상태에서 "PQ가 중심을 지난다"는 조건을 어떻게 α와 β에 관한 방정식으로 바꿀 수 있을까?

첫 번째 부분을 이용한다. 타원은 중심 C에 대한 반바퀴 회전(점대칭)에 대하여 대칭이다. P와 Q가 지름의 양 끝이면, 이 반바퀴 회전은 두 점을 서로 바꾸고 P에서의 접선을 Q에서의 접선으로 옮긴다. 반바퀴 회전은 모든 직선을 그와 평행한 직선으로 옮기므로, P와 Q에서의 접선은 평행하다.

따라서 P에서 $\theta = \alpha$, Q에서 $\theta = \beta$라 하면, $(*)$의 벡터 $\mathbf{d}(\alpha)$와 $\mathbf{d}(\beta)$는 평행하다. 기울기 대신 벡터를 다루면 접선이 수직일 때에도 0으로 나누는 일이 생기지 않는다. $s_\alpha = \sin\alpha$, $c_\alpha = \cos\alpha$ 등으로 쓰자. 조건은

$$(s_\alpha + c_\alpha + e)(c_\beta - s_\beta + e) = (s_\beta + c_\beta + e)(c_\alpha - s_\alpha + e).$$

전개하면 $c_\alpha c_\beta$, $-s_\alpha s_\beta$, ec_α, ec_β, e^2 항이 양변에 모두 나타나 소거되고,

$$s_\alpha c_\beta - c_\alpha s_\beta + es_\alpha - es_\beta = s_\beta c_\alpha - c_\beta s_\alpha + es_\beta - es_\alpha,$$

즉

$$\sin(\alpha - \beta) + e(\sin\alpha - \sin\beta) = 0$$

이 남는다. 이제 $\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$와 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$를 이용하면

$$2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

? 생각해 보기 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$를 약분해도 될까?

그렇다. P와 Q는 서로 다른 점이므로 α와 β의 차는 2π의 배수가 아니고, 따라서 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$이다. 그러므로

$$\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

$\frac{\alpha}{2}$와 $\frac{\beta}{2}$로 전개하면

$$(1+e)\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + (1-e)\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} = 0.$$

$(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$로 나누면 ($E$가 타원이므로 $1-e>0$이다)

$$\tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2} = -\frac{1+e}{1-e}$$

를 얻고, 이것이 증명하려던 식이다. 이 나눗셈은 $\cos\frac{\alpha}{2}$나 $\cos\frac{\beta}{2}$가 0이 아닌 한 유효하다. 예를 들어 $\alpha = \pi$이면 위 방정식에서 $\sin\frac{\beta}{2} = 0$이어야 하므로 $\beta = 0$이다. 이 지름은 OSA를 따라 놓인 장축(major axis)이며, 이 경우 탄젠트의 곱은 정의되지 않는다. 그 밖의 모든 지름은 이 결과를 만족한다.

검산

- $\alpha = 0$ (S에 더 가까운 꼭짓점(vertex))에서 공식은 기울기 $\frac{-1-e}{1+e} = -1$을 준다. 옳은 값이다. 장축의 끝에서의 접선은 $y = x$에 수직이기 때문이다.
- $e = \frac{1}{2}$이면 곱은 -3이어야 한다. $\alpha = \frac{\pi}{2}$로 잡으면 $\tan\frac{\alpha}{2} = 1$이다. 그러면 $\tan\frac{\beta}{2} = -3$이므로 $\sin\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{4}{5}$이다. $(*)$로부터 $\mathbf{d}(\alpha) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $\mathbf{d}(\beta) = (\frac{9}{10}, \frac{3}{10})$이고, 두 벡터는 평행하다. ✓

- 수치적으로, ℓ, e, S, α를 무작위로 2000번 골라 확인한 결과, 기울기 공식은 유한 차분(finite-difference) 도함수와 일치하였고, P를 중심(S에서 AS 방향으로 거리 $\ell e/(1-e^2)$인 곳)에 대하여 대칭이동하여 얻은 E 위의 점 Q의 β는 10^{-13} 이내의 오차로 항등식을 만족하였다.

흔한 실수

- $\frac{\pi}{4}$ 회전을 잊고 $x = r\cos\theta$를 사용하여, 잘못된 좌표계에서의 기울기를 구하는 실수.
- $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나누는 실수.
- 중심을 직접 구해서 "C는 PQ의 중점이다"라는 조건을 바로 부과하려는 시도. 가능은 하지만 평행한 접선을 이용하는 것보다 훨씬 번거롭다.

STEP 너머

지름의 양 끝에서 접선이 평행하다는 사실은 **공액지름**(*conjugate diameters*) 이론의 일부이다. 평행한 현(chord)들의 중점은 한 지름 위에 있고, 그 지름의 양 끝에서의 접선은 그 현들과 평행하다. 타원을 원으로 바꾸는 아핀 사상(affine map)을 적용하면 이 모든 것이 초보적인 원의 기하가 되는데, 이것이 아핀 기하학과 사영기하학(projective geometry)이 그토록 강력한 이유 중 하나이다. 여기서 쓴 반각 탄젠트는 천체역학(celestial mechanics)에서 궤도를 나타낼 때 쓰는 표준적인 매개변수화(parametrisation)이기도 하다. 이 기하학으로 들어가는 좋은 대학 1학년 수준의 길잡이로는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)나 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 읽어 보기 바란다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.