풀이

STEP III 1992, 문제 8

순수수학 • 근을 이용한 삼각함수의 합

> **STEP III 1992, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q8

핵심 아이디어

드 무아브르 정리(de Moivre's theorem)를 쓰면 $\sin(2n+1)\theta$를 $\cos\theta$와 $\sin\theta$에 대한 다항식(polynomial)으로 바꿀 수 있고, 여기서 $\sin^{2n+1}\theta$를 나누어 내면 $\cot^2\theta$에 대한 다항식이 남는다. 각 $k\pi/(2n+1)$에서는 좌변이 0이 되므로, 이 각들의 코탄젠트의 제곱은 이미 알고 있는 다항식의 근(root)이 된다. 근을 **모두** 알고 나면, 세 합은 모양만 바꾼 비에트 공식(Vieta's formulas), 곧 근의 합과 근의 역수의 합에 지나지 않는다.

풀이

항등식

$c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, $N = 2n+1$이라 하자. 드 무아브르 정리와 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$\cos N\theta + \mathrm{i}\sin N\theta = (c+\mathrm{i}s)^N = \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}c^{N-j}(\mathrm{i}s)^j.$$

허수인 항은 j가 홀수인 항이다. $j = 2m+1$로 두면 $\mathrm{i}^{2m+1} = \mathrm{i}(-1)^m$이므로

$$\sin N\theta = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2n+1}{2m+1}c^{2n-2m}s^{2m+1}.$$

이제 $r = n - m$으로 두어 합의 순서를 뒤집는다. 그러면 $2m + 1 = 2n + 1 - 2r$이고, 이항 계수(binomial coefficient)의 대칭성에 의해 $\binom{2n+1}{2n+1-2r} = \binom{2n+1}{2r}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{2n+1}{2r} c^{2r} s^{2n+1-2r} \\ &= \sin^{2n+1}\theta \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{2n+1}{2r} \cot^{2r}\theta,\end{aligned}$$

이다. 여기서 s^{2n+1}을 묶어 내고 $c^{2r}/s^{2r} = \cot^{2r}\theta$를 이용하였다. 이 식은 $\sin\theta \neq 0$일 때마다 성립하며, 이것이 보이라고 한 것이다.

다항식의 근

$$p(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{2n+1}{2r} x^r,$$

라 하고, $k = 1, \ldots, n$에 대하여 $\theta_k = k\pi/(2n+1)$로 두자. 그러면 $(2n+1)\theta_k = k\pi$이므로 $\sin(2n+1)\theta_k = 0$이고, 한편 $0 < \theta_k < \pi/2$이므로 $\sin\theta_k \neq 0$이다. 항등식을 $\sin^{2n+1}\theta_k$로 나누고 $(-1)^n$을 곱하면

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{2n+1}{2r} \cot^{2r}\theta_k = 0, \qquad \text{즉,} \qquad p(\cot^2\theta_k) = 0.$$

생각해 보기 이것들이 근의 **전부**라는 것을 어떻게 알 수 있을까? 아래의 합은 모두 이 사실에 기대고 있다.

각 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$은 모두 $(0, \pi/2)$에 있고, 이 구간에서 cot은 양수이며 순감소한다. 따라서 n개의 수 $\cot^2\theta_k$는 서로 다르다. p의 최고차항 계수(leading coefficient)는 $(-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1) \neq 0$이므로 p의 차수는 정확히 n이고, 따라서 근은 많아야 n개이다. 그러므로 $p(x) = 0$의 근은 정확히 $k = 1, \ldots, n$에 대한 $\cot^2\theta_k$이며, 각각 단순근(simple root)이다.

필요한 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[x^n]:\ & (-1)^n \binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1), \\ [x^{n-1}]:\ & (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} = (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}, \\ [x^1]:\ & -\binom{2n+1}{2} = -n(2n+1), \qquad [x^0]:\ 1.\end{aligned}$$

소문항 (i)

근의 합은 x^{n-1}의 계수와 x^n의 계수의 비에 음의 부호를 붙인 것이다.

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k = -\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}}{(-1)^n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

소문항 (ii)

$\tan^2\theta_k = 1/\cot^2\theta_k$이므로, 구하는 것은 근 x_k의 역수의 합이다. 상수항이 1이므로 어느 근도 0이 아니며,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} = \frac{\sum_k \prod_{j\neq k} x_j}{\prod_k x_k},$$

이다. 비에트 공식에 의해 이 식의 분자와 분모는 각각 $(-1)^{n-1}\cdot[x^1]/[x^n]$과 $(-1)^n\cdot[x^0]/[x^n]$이다. 그 비는 $-[x^1]/[x^0]$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\tan^2\theta_k = -\frac{-n(2n+1)}{1} = n(2n+1).$$

(같은 이야기를 이렇게 할 수도 있다. 역수 $1/x_k$는 계수의 순서를 뒤집은 다항식 $x^n p(1/x)$의 근이므로, 그 다항식의 근의 합을 읽어 내면 된다.)

소문항 (iii)

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1+\cot^2\theta$와 소문항 (i)을 이용하면

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}^2\theta_k = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{3n+2n^2-n}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

검산

$n=1$일 때 다항식은 $1-3x$이고, 그 근은 $\frac{1}{3} = \cot^2(\pi/3)$이다. 이때 (i)은 $\frac{1}{3}$, (ii)는 $3 = \tan^2(\pi/3)$, (iii)은 $\frac{4}{3} = \operatorname{cosec}^2(\pi/3)$을 주며, 모두 옳다. $n=3$일 때 각은 $\pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7$이고, 계산기로 구한 세 합은 $5, 21, 8$로 $\frac{3\cdot5}{3}, 3\cdot7, \frac{2\cdot3\cdot4}{3}$과 일치한다. 또한 임의의 θ와 n에서 항등식을, $n\leq 29$에 대해 세 합을 모두 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $\cot^2\theta_k$가 서로 다르고 p의 차수가 정확히 n이라는 논증을 빠뜨리는 것. 이것이 없으면 $\cot^2\theta_k$에 비에트 공식을 적용할 수 없다.
- 계수의 부호 실수. 소문항 (i)에서 인수 $(-1)^n$은 약분되지만, 두 계수 모두에 그 인수가 붙어 있을 때에만 그렇다.

- k를 $2n$까지 쓰는 것. $k > n$일 때 각 $k\pi/(2n+1)$은 같은 $\cot^2$ 값을 되풀이하므로, 서로 다른 근을 주는 것은 $k \leq n$뿐이다.

STEP 너머

소문항 (iii)과 $0 < \theta < \pi/2$에서 성립하는 $\cot^2\theta < 1/\theta^2 < \operatorname{cosec}^2\theta$를 함께 쓰면, $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$를 여기서 구한 합의 두 상수배 사이에 끼워 넣을 수 있다. $n \to \infty$로 보내면 오일러(Euler)의 유명한 결과 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$을 얻는데, 이는 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서 자주 소개하는 아름다운 초등적 증명이다. 다항식의 계수에서 합을 읽어 내는 이 아이디어는 대칭함수(symmetric functions)와 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 바탕이 된다. 해석학 쪽으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 이런 결의 문제를 더 원한다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.