풀이

STEP III 1992, 문제 7

순수수학 • 벡터 기하

STEP III 1992, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q7

핵심 아이디어

이 문제의 모든 것은 평행사변형과, 주어진 비로 변을 나누는 점들로 이루어져 있다. 이런 상황은 바로 위치벡터(position vector)가 잘 다루는 것이다. 원점을 A에 두고, 모든 점을 두 변 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AD}$로 나타낸다. 그런 다음 두 직선의 교점을 구하고, 이 점이 세 번째 직선 위에 있는지 확인한다.

풀이

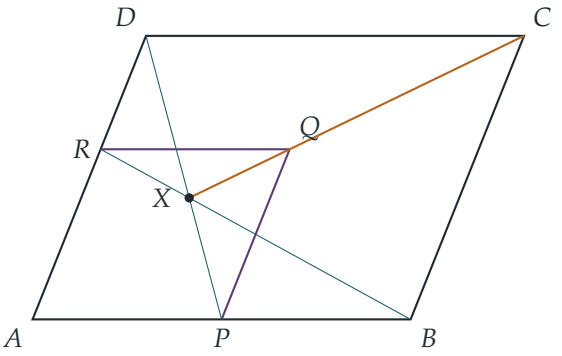
A를 원점으로 잡고 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$라 하자. $ABCD$는 진짜 평행사변형이므로 이 두 벡터는 평행하지 않다. 따라서 평면 위의 모든 점은 단 하나의 실수 쌍 (λ, μ)에 대하여 $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$로 나타나며, 계수를 비교할 수 있다.

$ABCD$가 평행사변형이므로 C의 위치벡터는 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$이다. P는 변 AB 위에, R는 변 AD 위에 있으므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{p} = p\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = r\,\mathbf{d}, \qquad 0 \le p, r \le 1.$$

$APQR$가 평행사변형이므로 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$이고, 따라서

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{b} + r\,\mathbf{d}.$$



BR와 DP의 교점

직선 BR 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b} + s(r\mathbf{d} - \mathbf{b}) = (1-s)\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d},$$

이고, 직선 DP 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{d} + t(p\mathbf{b} - \mathbf{d}) = tp\,\mathbf{b} + (1-t)\,\mathbf{d}.$$

이다. 공통인 점에서는 $\mathbf{b}$의 계수와 $\mathbf{d}$의 계수가 각각 같아야 한다.

$$1 - s = tp, \qquad sr = 1 - t.$$

$s = 1 - tp$를 두 번째 식에 대입하면 $r - rpt = 1 - t$이므로 $t(1-pr) = 1 - r$이다.

> **생각해 보기** $1 - pr$로 나눌 수 있는가?

$0 \le p, r \le 1$이므로 $pr = 1$인 것은 $p = r = 1$일 때, 즉 $P = B$이고 $R = D$일 때뿐이다. 이때 $Q = C$가 되어 "직선" CQ가 정의되지 않으므로 증명할 것이 없다. 따라서 이 경우를 제외하면 $1 - pr > 0$이다. 이것은 또한 BR와 DP가 평행하지 않아 정확히 한 점에서 만난다는 것도 보여 준다. 그러면

$$t = \frac{1-r}{1-pr}, \qquad s = 1 - tp = \frac{1 - pr - p + pr}{1-pr} = \frac{1-p}{1-pr},$$

이고, 교점 X는

$$\mathbf{x} = tp\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d} = \frac{p(1-r)\,\mathbf{b} + r(1-p)\,\mathbf{d}}{1-pr}.$$

이다.

X는 CQ 위에 있다

직선 CQ 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{c} + u(\mathbf{q} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{d}) + u((p-1)\mathbf{b} + (r-1)\mathbf{d}) = (1 - u(1-p))\mathbf{b} + (1 - u(1-r))\mathbf{d}.$$

이다. $u = \dfrac{1}{1-pr}$을 대입해 보자. $\mathbf{b}$의 계수는

$$1 - \frac{1-p}{1-pr} = \frac{1-pr-1+p}{1-pr} = \frac{p(1-r)}{1-pr},$$

이 되고, $\mathbf{d}$의 계수는

$$1 - \frac{1-r}{1-pr} = \frac{1-pr-1+r}{1-pr} = \frac{r(1-p)}{1-pr}.$$

이 된다. 이는 정확히 $\mathbf{x}$의 계수이다. 따라서 X는 CQ 위에도 있고, 세 직선 BR, CQ, DP는 모두 X를 지난다. 즉 요구한 대로 세 직선은 한 점에서 만난다. ■

(대칭성도 이 결과를 뒷받침한다. B, P, p와 D, R, r의 역할을 서로 바꾸면 BR와 DP가 서로 바뀌고, CQ는 그대로이며, $\mathbf{x}$의 식도 변하지 않는다.)

검산

- $P = A$ $(p = 0)$이면 $Q = R$이고 $\mathbf{x} = r\mathbf{d}$, 즉 R이다. 실제로 DP는 직선 DA이고 이는 BR와 R에서 만나며, CQ는 CR이므로 R를 지난다.
- P와 R가 각각 AB와 AD의 중점이면 $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$, 즉 A에서 C까지 가는 길의 3분의 1 지점이다. BR와 DP는 삼각형 ABD의 두 중선이므로, 이 점은 당연히 삼각형 ABD의 무게중심(centroid)이다.
- 무작위로 만든 평행사변형 5000개와 무작위로 잡은 P, R의 위치에 대하여 분수로 정확하게 계산하여 세 직선이 한 점에서 만나는지 확인했다. 모든 경우가 $\mathbf{x}$의 식과 일치했다.

흔한 실수

- 두 계수를 비교할 수 있는 것은 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{d}$가 평행하지 않기 때문이라는 사실을 잊는다.
- 서로 다른 두 직선에 같은 매개변수를 쓴다. 직선마다 각자의 매개변수(s, t, u)가 필요하다.
- $Q = C$가 되어 직선 CQ가 정의되지 않는 퇴화된 경우 $P = B$, $R = D$를 언급하지 않는다.

STEP 너머

이 풀이에서는 길이나 각을 전혀 쓰지 않았고, 평행선과 직선 위의 비만 썼다는 점에 주목하자. 따라서 이 결과는 **아핀 기하학**(affine geometry)에 속한다. 아핀 사상(affine map, 선형

사상 다음에 평행이동을 한 것)은 어떤 평행사변형이든 정사각형으로 보내면서 세 직선이 한 점에서 만나는 성질(concurrency)을 보존하므로, 정사각형에 대해서만 결과를 증명해도 충분하다. 직선들이 만나는지에 관한 질문은 사영기하학(projective geometry)에서도 자연스러운데, 체바(Ceva)의 정리와 데자르그(Desargues)의 정리 같은 정리들이 바로 그곳에 속한다. 이러한 아이디어를 폭넓고 읽기 쉽게 둘러보고 싶다면 Coxeter의 *Introduction to Geometry*(기하학 입문)나 Brannan, Esplen, Gray의 *Geometry*(기하학)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.