풀이

STEP III 1992, 문제 6

순수수학 • 삼각함수 적분의 점화식

> **STEP III 1992, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q6

핵심 아이디어

두 점화식 모두 삼각함수의 차를 $\sin x$를 인수로 갖는 곱으로 바꾸는 데서 출발한다. 그러면 이 인수가 다루기 까다로운 분모와 약분된다. I_n에 대해서는 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$를 쓰고, J_n에 대해서는 $\sin P - \sin Q$에 대한 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)을 쓴다. 분모가 사라지고 나면 남는 것은 기본적인 적분이며, 두 점화식(reduction formula)은 연쇄적으로 소거(telescope)된다.

풀이

먼저 피적분함수(integrand)에 대해 짚고 넘어가자. 각 피적분함수의 분모에는 $\sin x$가 있고, 이는 $x = 0$과 $x = \pi$에서 0이 된다. 그러나 이 특이점은 제거 가능한 특이점(removable singularity)이다. $x \to 0$일 때 $\sin(nx)/\sin x \to n$이고 $x \to \pi$일 때 $\sin(nx)/\sin x \to \pm n$이므로 두 피적분함수는 모두 유계로 남는다. 따라서 아래의 모든 적분은 연속함수의 보통의 적분이다.

관계식 $I_n - I_{n-1} = J_n$

$\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)$와 합을 곱으로 바꾸는 공식을 이용하면

$$\sin^2 A - \sin^2 B = (2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2})(2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}) = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

이다. $A = nx$, $B = (n-1)x$로 두면

$$\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x) = \sin((2n-1)x)\sin x.$$

를 얻는다. 따라서 $n \geq 1$에 대하여

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{x[\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x)]}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{x\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = J_n,$$

이므로 요구된 결과가 성립한다. ($n = 1$일 때 I_0은 $x\sin^2 0/\sin^2 x = 0$의 적분으로 읽으므로 $I_0 = 0$이다.)

J_n에 대한 점화식

이제 J_{n+1}과 J_n을 비교하자. 합을 곱으로 바꾸는 공식 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$에 의해

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x,$$

이므로 이번에도 $\sin x$가 약분된다.

$$J_{n+1} - J_n = 2\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\Big]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{4n^2}\Big[\cos(2nx)\Big]_0^\pi = \frac{1}{4n^2}(1-1) = 0,\end{aligned}$$

이다. 정수 n에 대하여 $\sin(2n\pi) = 0$이고 $\cos(2n\pi) = 1$이기 때문이다. 따라서 점화식은

$$J_{n+1} = J_n \qquad (n \geq 1).$$

이다.

> **생각해 보기** $J_{n+1} = J_n$이라는 점화식은 의심스러울 만큼 자명해 보인다. 정말 이것이 답일까?

그렇다. 새로 나타난 $2\cos(2nx)$에 x를 곱해 정수 개의 주기에 걸쳐 적분하면 0이 되므로, n이 하나 바뀌어도 달라지는 것이 없다. 값을 확정하려면 첫째 항만 구하면 된다.

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2},$$

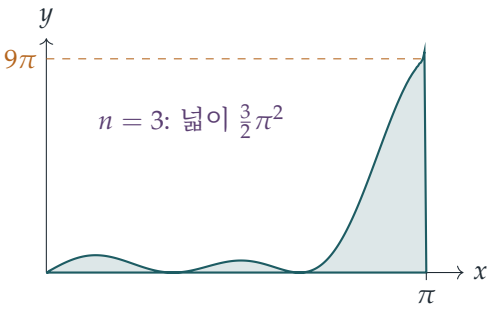
따라서 모든 양의 정수 n에 대하여 $J_n = \frac{1}{2}\pi^2$이다.

C 아래의 넓이

$(0,\pi)$에서 $x \geq 0$이고 $\sin^2(nx)/\sin^2 x \geq 0$이므로 곡선은 x축 아래로 내려가지 않는다. 따라서 C 아래의 넓이는 정확히 I_n이다. 첫 번째 관계식을 더하고(연쇄적으로 소거된다) $I_0 = 0$을 이용하면

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} J_k = n\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

이다. 따라서 C 아래의 넓이는 요구된 대로 $\frac{1}{2}n\pi^2$이다.



검산

- $n = 1$: 곡선은 $y = x$이고, 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi^2$이다. ✓
- $n = 1, \ldots, 8$에 대하여 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 적분을 계산하면 매번 $J_n \approx 4.9348022 = \frac{1}{2}\pi^2$를 얻고, 예를 들어 $I_3 \approx 14.8044066 = \frac{3}{2}\pi^2$이다.
- 곡선은 $x = \pi$에서 $y = n^2\pi$까지 올라가지만 넓이는 n에 대해 선형으로만 증가한다. 봉우리는 높아지지만 폭이 좁아지므로(폭은 약 π/n) 이는 모순이 없다.

흔한 실수

- $I_0 = 0$임을 잊어버려(또는 I_0이 무엇을 뜻하는지 확인하지 않아) 연쇄 소거되는 합의 시작값이 없게 되는 경우.
- $\int x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$에서 부호를 틀리는 경우. 경계항이 0이 되고 $[0, \pi]$에서 $\sin(2nx)$의 나머지 적분이 0임을 확인하는 편이 더 깔끔하다.

STEP 너머

함수 $\sin^2(nx)/\sin^2 x$는 $1/n$배를 제외하면 푸리에 해석(Fourier analysis)의 **페예르 핵**(*Fejér kernel*)이고, $\sin\big((2n-1)x\big)/\sin x$는 본질적으로 **디리클레 핵**(*Dirichlet kernel*)이다. 여기서 발견한 사실, 즉 이 함수들이 구간의 양 끝에 집중되면서도 그 적분은 n에 의존하지 않는다는 사실이 바로 푸리에 급수(Fourier series)가 수렴함을 증명하는 데 이 함수들을 유용하게 만드는 성질이다. Stein과 Shakarchi의 *Fourier Analysis: An Introduction*(푸리에 해석 입문)이 이 내용을 아름답게 전개한다. 실해석학의 배경 지식은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.