풀이

STEP III 1992, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터 기하

> **STEP III 1992, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q5

핵심 아이디어

대칭성이 거의 모든 일을 해 준다. 평면 $y+z=2$에 대한 반사(reflection)는 사면체(tetrahedron)를 자기 자신으로 옮기고 A와 D를 고정하므로, B와 C를 서로 바꾸어야 한다. 이로부터 BC가 평면에 수직이고 그 중점 N이 평면 위에 있음을 알 수 있다. 그 뒤로는 네 꼭짓점이 모두 중심 Y로부터 같은 거리에 있다는 사실을 이용하여 피타고라스(Pythagoras) 정리와 스칼라곱(scalar product)만으로 모든 것이 해결된다.

풀이

N과 반지름 구하기

$\overrightarrow{AY} = (3,-2,4)-(0,4,-2) = (3,-6,6)$이므로 구(sphere)의 반지름은 다음과 같다.

$$YA = \sqrt{9+36+36} = 9.$$

$\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$이므로 $\overrightarrow{YN} = (1,-2,2)$이고, 따라서 $N=(4,-4,6)$, $YN=3$이다.

A, Y, N이 모두 $y+z=2$를 만족한다는 점에 주목하자. 즉 세 점 모두 대칭면(plane of symmetry) 위에 있다.

왜 BC가 평면에 수직인가

Π를 평면 $y+z=2$라 하자. Π에 대한 반사는 사면체를 자기 자신 위로 옮기므로 꼭짓점들을 치환(permute)한다. 이 반사는 A와 D를 고정하는데, 이 두 점은 Π 위에 있다. B와 C는 어느 것도 Π 위에 있지 않다. 만약 하나가 그렇다면 반사가 그 점을 고정하게 되고, 그러면 네 번째 꼭짓점도 고정해야 하므로 네 꼭짓점이 모두 Π 위에 놓여 사면체가 만들어지지 않

는다. 따라서 반사는 B와 C를 서로 바꾸며, 이는 C가 B의 거울상이라는 뜻이다. 그러므로

- BC는 Π에 수직이므로 법선(normal) $(0,1,1)$에 평행하다;
- BC의 중점 N은 Π 위에 있다(앞에서 구한 결과와 일치한다).

? 생각해 보기 왜 삼각형 YNB는 N에서 직각인가?

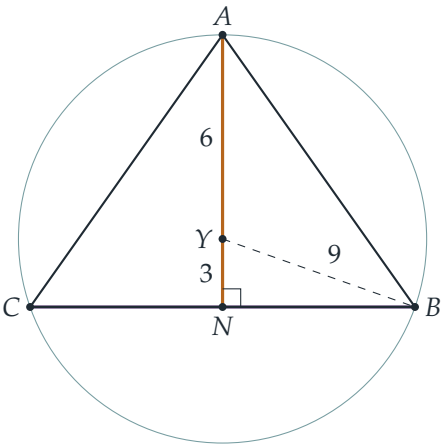
Y와 N이 모두 Π 위에 있으므로 YN은 Π 안의 직선이다. 그런데 NB는 Π의 법선 방향이다. 법선은 평면 안의 모든 직선에 수직이므로 $\angle YNB = 90°$이다.

BN과 B, C의 좌표

B는 구 위에 있으므로 $YB = 9$이다. 삼각형 YNB에서 피타고라스 정리에 의해

$$BN^2 = YB^2 - YN^2 = 81 - 9 = 72, \qquad \text{따라서} \qquad BN = 6\sqrt{2},$$

이고, 이것이 요구한 결과이다.



그림은 평면 ABC를 축척에 맞게 그린 것으로, 이 평면은 Y를 포함한다(Y가 AN 위에 있기 때문이다). 호박색 선 AN은 이 평면이 Π와 만나는 곳이고, 원은 이 평면이 구를 자르는 곳이다.

BC 방향의 단위벡터(unit vector)는 $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$이므로 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{NB} = \pm 6\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \pm(0,6,6).$$

$N = (4,-4,6)$이므로 현(chord)의 두 끝점은 $(4,2,12)$와 $(4,-10,0)$이다. 따라서

$$B = (4,2,12),\ C = (4,-10,0) \qquad \text{또는} \qquad B = (4,-10,0),\ C = (4,2,12).$$

검산해 보면, $(4,2,12) - (3,-2,4) = (1,4,8)$의 길이는 $\sqrt{1+16+64} = 9$이므로 B는 실제로 구 위에 있다.

D의 좌표

$\overrightarrow{YD} = (p, q, r)$라 하자. 조건은 세 가지이다.

- D와 Y가 모두 Π 위에 있으므로 $\overrightarrow{YD}$는 법선 $(0, 1, 1)$에 수직이다. 즉 $q + r = 0$이다.
- D는 구 위에 있다. 즉 $p^2 + q^2 + r^2 = 81$이다.
- 각에 대한 조건: $\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = YA \cdot YD \cos \angle AYD = 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 27$.

> **생각해 보기** 미지수 세 개에 대한 방정식이 세 개 있지만, 그중 하나는 이차식이다. 해가 몇 개일 것으로 예상할 수 있는가?

마지막에 이차방정식(quadratic equation)이 나오므로 많아야 두 개이다. 기하학적으로 보면 D는 Π가 구를 자르는 원(곧 $Y \in \Pi$이므로 대원(great circle)) 위에 있고, 그 원 위에서 YA와 주어진 각을 이루는 점은 A의 양쪽에 거울상으로 놓인 두 점이다.

$\overrightarrow{YA} = (-3, 6, -6)$이고 $r = -q$이므로 각에 대한 조건으로부터 다음을 얻는다.

$$-3p + 6q + 6q = 27 \quad \Longrightarrow \quad p = 4q - 9.$$

$r^2 = q^2$임을 이용하여 이를 구의 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (4q - 9)^2 + 2q^2 &= 81 \\ 18q^2 - 72q &= 0 \\ 18q(q - 4) &= 0. \end{aligned}$$

- $q = 0$: 이때 $p = -9, r = 0$이므로 $\overrightarrow{YD} = (-9, 0, 0)$이고 $D = (-6, -2, 4)$이다.
- $q = 4$: 이때 $p = 7, r = -4$이므로 $\overrightarrow{YD} = (7, 4, -4)$이고 $D = (10, 2, 0)$이다.

두 경우 모두 진짜 사면체를 이룬다. D는 Π 위에 있지만 직선 AN(평면 ABC 가운데 Π 안에 있는 유일한 부분) 위에는 없으므로, D는 평면 ABC 위에 있지 않다. 따라서

$$D = (-6, -2, 4) \qquad \text{또는} \qquad D = (10, 2, 0).$$

검산

- 각 D는 $y + z = 2$를 만족하고, 두 경우 모두 $|\overrightarrow{YD}|^2 = 81$이다($81$과 $49 + 16 + 16$).
- $D = (10, 2, 0)$인 경우: $\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = -21 + 24 + 24 = 27 = 81 \cdot \frac{1}{3}$. ✓
- B와 C는 서로의 거울상이다. (x, y, z)를 $y + z = 2$에 대해 반사하면 $(x, 2 - z, 2 - y)$가 되며, 이 변환은 $(4, 2, 12)$를 $(4, -10, 0)$으로 보낸다.

- 컴퓨터로 좌표의 크기가 20 이하인 Π의 모든 정수점 가운데 구 위에 있으면서 $\cos\angle AYD = \frac{1}{3}$인 점을 찾아보았더니, 정확히 $(-6,-2,4)$와 $(10,2,0)$만 나왔다. 사면체의 부피는 두 경우 모두 $1728/6 = 288$이므로 납작하지 않다.

흔한 실수

- N을 잘못 구하기. $\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$이면 Y는 AN을 따라 4분의 3 지점에 있으므로 $N = Y + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$이고, $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$가 아니다.
- 반지름을 YN이나 AN으로 잡기. 반지름은 $YA = 9$이고, $YN = 3$은 중심에서 현 BC까지의 거리일 뿐이다.
- D가 Π 위에 있어야 함을 잊기. $q + r = 0$이 없으면 가능한 점이 원 하나 전체만큼 있다.

STEP 너머

반사가 B와 C를 서로 바꾸어야 한다는 논증은 작은 군론(group theory)이다. 도형의 대칭은 꼭짓점들을 치환하는 방식으로 작용하고, 반사의 고정점은 반드시 그 거울면 위에 있어야 한다. 반사 자체는 선형대수(linear algebra)의 사상 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-d)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$이며, 행렬식(determinant)이 -1인 직교변환(orthogonal transformation)이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 반사와 직교행렬을 다루고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 대칭군(symmetry group)을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.