풀이

STEP III 1992, 문제 4

순수수학 • 직교 궤적

> **STEP III 1992, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q4

핵심 아이디어

S_1의 각 곡선을 $y = 1 + \dfrac{a}{x-a}$ 꼴로 쓴다. 이것은 점근선(asymptote)이 $x = a$와 $y = 1$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이며, 모든 곡선이 원점을 지난다. 곡선족 전체가 만족하는 미분방정식(differential equation)을 구하려면, 미분한 다음 곡선 자신의 방정식을 이용해 a를 소거한다. 두 곡선은 기울기(gradient)의 곱이 -1일 때, 그리고 그때에만 직교하므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 $-1/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$로 바꾸면 S_1의 방정식이 S_2의 방정식으로 바뀌고, 이 방정식은 변수분리(separation of variables)가 가능하다.

풀이

S_1의 곡선

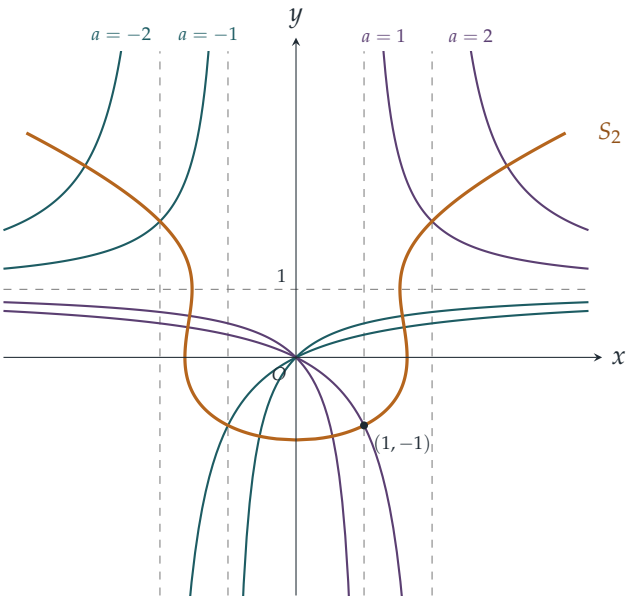
$x = (x-a) + a$이므로

$$y = \frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2}.$$

따라서 $a \neq 0$이면 이 곡선은 수직점근선이 $x = a$, 수평점근선이 $y = 1$인 직각쌍곡선이고, 원점을 지난다.

- $a > 0$이면 기울기는 항상 음수이다. $x < a$인 가지는 ($x \to -\infty$일 때) $y = 1$에서 내려와 O를 지나고, $x \to a^-$일 때 $-\infty$로 떨어진다. $x > a$인 가지는 $+\infty$에서 내려와 $y = 1$에 가까워진다.
- $a < 0$이면 기울기는 항상 양수이다. $x > a$인 가지는 $-\infty$에서 올라와 O를 지나 $y = 1$에 가까워진다. $x < a$인 가지는 $y = 1$보다 위에 있다.

x를 $-x$로 바꾸면 $\frac{x}{x-a}$가 $\frac{x}{x+a}$로 바뀌므로, $-a$에 대한 곡선은 a에 대한 곡선을 y축에 대해 대칭이동한 것이다. 그래프를 그릴 때 편리한 점: $x = \frac{3}{2}a$일 때 $y = 3$이다.



점선은 점근선이다. 호박색 곡선은 $(1, -1)$을 지나는 S_2의 곡선이며, 그 모양이 왜 이러한지는 아래에서 설명한다.

S_1의 미분방정식

$y(x-a) = x$에서 $x - a = \dfrac{x}{y}$이고 $a = x - \dfrac{x}{y} = \dfrac{x(y-1)}{y}$이다. ($S_1$의 곡선 위에서 $y = 0$인 곳은 원점뿐이므로, 그 점을 제외하면 y로 나눌 수 있다.) 이것을 기울기에 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2} = -\frac{x(y-1)}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2} = -\frac{y(y-1)}{x},$$

이므로 S_1의 모든 곡선은 다음을 만족한다.

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y).$$

S_2의 미분방정식

두 곡선은 만나는 점에서의 기울기의 곱이 -1일 때, 그리고 그때에만 직각으로 만난다. 따라서 공통점에서 S_1 곡선의 기울기를 p_1, S_2 곡선의 기울기를 p_2라 하면 $p_1 p_2 = -1$, 즉 $p_1 = -1/p_2$이다.

생각해 보기 방금 구한 방정식은 S_1에 관한 것이다. 그런데 왜 이것이 S_2에 대해서도 무언가를 알려 주는가?

$(x, y \neq 0$인$)$ 각 점 (x, y)를 지나는 S_1의 곡선은 정확히 하나, 곧 $a = x(y-1)/y$인 곡선뿐이며, 그 점에서의 기울기는 $-y(y-1)/x$이다. 같은 점을 지나는 S_2의 곡선은 기울기가 $p_2 = -1/p_1$이어야 하므로, S_2 위에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{-y(y-1)/x} = \frac{x}{y(y-1)}, \qquad \text{즉,} \qquad x = y(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

가 되어 요구한 식을 얻는다.

$(1, -1)$을 지나는 S_2의 곡선

이 방정식은 변수분리형이다.

$$\int (y^2 - y)\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$(1, -1)$에서 $-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$이므로 $C = -\frac{4}{3}$이다. 양변에 6을 곱하면, 그리려는 곡선은 다음과 같다.

$$3x^2 = 2y^3 - 3y^2 + 8.$$

곡선을 그리기 위해 $g(y) = 2y^3 - 3y^2 + 8$이라 하면 $x = \pm\sqrt{g(y)/3}$이고, 곡선은 y축에 대해 대칭이다. $g'(y) = 6y(y-1)$이므로 g는 극댓값(local maximum) $g(0) = 8$과 극솟값(local minimum) $g(1) = 7$을 갖는다. 둘 다 양수이므로 g의 실근은 -2와 -1 사이에 하나뿐이다($g(-2) = -20$, $g(-1) = 3$이므로). 수치적으로 이 근은 $y_0 \approx -1.214$이다. 따라서 이 곡선은

- $(0, y_0)$에서 최저점을 가지며, 그 점에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$이다.
- $y = 0$인 곳$(x = \pm\sqrt{8/3} \approx \pm 1.63)$과 $y = 1$인 곳$(x = \pm\sqrt{7/3} \approx \pm 1.53)$에서 수직접선(vertical tangent)을 갖는다. 그곳에서 $y(y-1) = 0$이기 때문이다.
- $y = 0$과 $y = 1$ 사이에서는 축 쪽으로 약간 되돌아 휘고($x > 0$일 때 그 구간에서 기울기 $x/(y(y-1))$는 음수이다), 그 뒤로는 $y \approx (\frac{3}{2}x^2)^{1/3}$의 꼴로, $|x|$가 클수록 커진다.

그림을 검산해 보자. $(1, -1)$을 지나는 S_1 곡선은 $-1 = \frac{1}{1-a}$이므로 $a = 2$이고, 그 점에서 기울기는 -2이다. S_2의 기울기는 $\frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}$이며, 실제로 $(-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$이다. $y = 1$에서의 수직접선도 이치에 맞는다. 그곳에서 곡선은 $y = 1$, 곧 S_1에서 $a = 0$인 곡선과 직각으로 교차하기 때문이다.

검산

- $(1, -1)$에서: $3(1)^2 = 3$이고 $2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 8 = 3$이다. ✓
- S_2 곡선은 $a = 1$인 곡선과 $(2, 2)$에서 만난다. 그 점에서 S_1의 기울기는 $-1/(2-1)^2 = -1$이고 S_2의 기울기는 $2/(2 \cdot 1) = 1$이므로, 곱은 -1이다.
- 수치적으로, 호박색 곡선과 그림의 네 쌍곡선의 교점 열두 개를 모두 구했으며(곡선마다 세 개씩, 예를 들어 $a = -2$인 곡선과는 $(1.5901, 0.4429)$에서 만난다), 모든 교점에서 기울기의 곱은 -1.00000000이었다.

흔한 실수

- 미분방정식에 a를 남겨 두는 것: 핵심은 $y = x/(x-a)$ 자체를 이용해 그것을 소거하는 데 있다.
- $p_2 = -p_1$이나 $p_2 = 1/p_1$을 $p_1 p_2 = -1$ 대신 쓰는 것.
- S_2 곡선을 단순한 U자 모양으로 그리는 것: 이 곡선은 $y = 0$과 $y = 1$에서 수직접선을 가지며, 그 사이에서 살짝 뒤로 휜다.

STEP 너머

S_2의 곡선들은 S_1의 **직교궤적**(orthogonal trajectories)이다. 직교궤적은 물리학에서 등전위선과 교차하는 역선, 또는 속도 퍼텐셜이 일정한 선과 교차하는 유선으로 나타난다. 여기서 쓴 기법(매개변수를 소거한 다음 y'을 $-1/y'$로 바꾸기)은 표준적인 방법이며, 그 결과 얻는 1계 방정식은 처음 배우는 상미분방정식(ODE) 강의의 단골 소재이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.