풀이

STEP III 1992, 문제 3

순수수학 • 곡선과 다항식의 근

STEP III 1992, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q3

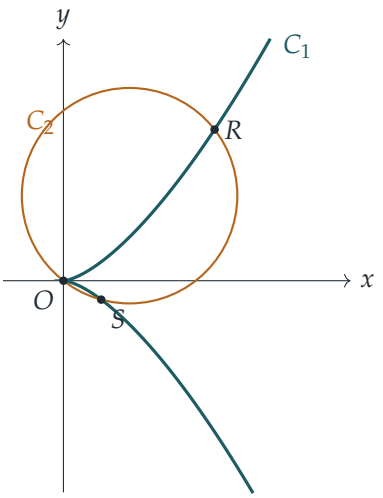
핵심 아이디어

매개변수 표현(parametrisation)을 원점을 지나는 원의 일반 방정식에 그대로 대입한다. 그러면 t에 대한 다항방정식을 얻는데, 그 근(root)은 교점들의 매개변수이고 원점은 인수 t^2로 나타난다. 남는 것은 t^3 항이 없는 사차식(quartic)이므로, 그 근들의 합과 두 근씩 곱한 것의 합이 정해져 있다. 따라서 두 근 r와 s를 알면 나머지 두 근이 완전히 결정된다.

풀이

개형 그리기

$x = t^2 \geq 0$이므로 곡선은 반평면 $x \geq 0$에 놓인다. t를 $-t$로 바꾸면 (x, y)가 $(x, -y)$로 옮겨지므로 곡선은 x축에 대하여 대칭(symmetric)이다. t를 소거하면 $y^2 = x^3$, 즉 $y = \pm x^{3/2}$를 얻는다. $t = 0$에서 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$이고, 원점 근처에서 $|y| = x^{3/2}$는 x보다 훨씬 작다. 따라서 두 가지는 모두 x축에 접하면서 O를 떠나고, 곡선은 O에서 **첨점**(*cusp*)을 가진다. t가 클 때는 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t}{2}$이므로 두 가지가 가파르게 증가한다.



청록색 곡선이 C_1이다. 호박색 원은 C_2의 한 예로, $r = 1$, $s = -\frac{1}{2}$일 때 O, R, S를 지나는 원이다.

사차방정식

원점을 지나는 원의 방정식에는 상수항이 없다:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0,$$

여기서 g와 f는 둘 다 0은 아닌 실수 상수이다. 매개변수가 t인 점이 이 원 위에 있을 필요충분조건은

$$t^4 + t^6 + 2gt^2 + 2ft^3 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad t^2\left(t^4 + t^2 + 2ft + 2g\right) = 0.$$

인수 t^2는 원점에 해당하는 $t = 0$을 준다. O가 아닌 모든 교점은 $t \neq 0$이므로, 그 매개변수는

$$t^4 + t^2 + at + b = 0, \qquad a = 2f, \quad b = 2g.$$

를 만족한다. 특히 r와 s는 이 방정식의 근이고, a, b는 요구된 대로 실수 상수이다.

$x \neq 0$일 때 $t = y/x$이고 ($x = 0$일 때 $t = 0$이므로) C_1의 각 점은 매개변수를 정확히 하나 가진다. 따라서 서로 다른 점 R와 S는 서로 다른 매개변수를 가지며 $r \neq s$이고, C_1과 C_2의 교점은 방정식 $t^2(t^4 + t^2 + at + b) = 0$의 실근과 정확히 대응한다.

나머지 두 근

사차방정식의 네 근(실수 또는 복소수)을 r, s, p, q라 하자.

$$(t - r)(t - s)(t - p)(t - q) = t^4 + 0 \cdot t^3 + 1 \cdot t^2 + at + b$$

의 계수를 비교하면

$$r+s+p+q=0,$$
$$rs+(r+s)(p+q)+pq=1.$$

를 얻는다. (여기서는 두 근씩의 곱 여섯 개를 rs, pq와 네 개의 교차항 $rp+rq+sp+sq=(r+s)(p+q)$로 묶었다.)

> **생각해 보기** 네 근 가운데 두 개만 알고 있다. a와 b를 모르면서 어떻게 나머지 두 근에 접근할 수 있을까?

값이 정해지지 않은 계수가 아닌 t^3과 t^2의 계수는 원과 전혀 관계가 없다. 첫째 식에서 $p+q=-(r+s)$이다. 이를 둘째 식에 대입하면

$$pq=1-rs+(r+s)^2=r^2+rs+s^2+1.$$

따라서 p와 q는 이차방정식

$$t^2+(r+s)\,t+\left(r^2+rs+s^2+1\right)=0,$$

의 근이고, 이 방정식의 계수는 r와 s에만 의존한다. C_1과 C_2의 교점이 더 있다면, 그 매개변수는 이 이차방정식의 실근이어야 한다.

(부산물로 $a=-(r+s)(r^2+s^2+1)$이고 $b=rspq=rs(r^2+rs+s^2+1)$이므로, O, R, S를 지나는 원은 r와 s에 의해 결정된다.)

다른 실수 교점은 없다

이 이차방정식의 판별식(discriminant)은

$$\begin{aligned}\Delta&=(r+s)^2-4\left(r^2+rs+s^2+1\right)\\&=-3r^2-2rs-3s^2-4\\&=-\left[2(r^2+s^2)+(r+s)^2+4\right].\end{aligned}$$

이다. $2(r^2+s^2)$와 $(r+s)^2$이 각각 음이 아니므로 대괄호 안의 값은 4 이상이다. 따라서 $\Delta\le-4<0$이고 이차방정식은 실근을 갖지 않는다. 즉 p와 q는 실수가 아닌 켤레복소수(complex conjugates) 쌍이다.

그러므로 $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$의 실근은 0, r, s뿐이다. 각 실근은 C_1의 점 하나에 정확히 대응하므로, C_1과 C_2의 실수 교점은 O, R, S뿐이다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

검산

$r = 1, s = -\frac{1}{2}$로 두자. 공식에 의해 $a = -\frac{9}{8}, b = -\frac{7}{8}$이므로 $f = -\frac{9}{16}, g = -\frac{7}{16}$이다. 원의 중심은 $(\frac{7}{16}, \frac{9}{16})$이고, $R = (1,1)$과 $S = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$은 모두 중심으로부터 거리의 제곱이 $\frac{130}{256}$이며, O도 마찬가지이다. 남은 이차식은 $t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{4}$이고 판별식은 $\frac{1}{4} - 7 < 0$이다. 이것이 그림 속의 원이며, C_1과 O, R, S에서만 만나는 것을 볼 수 있다. 또한 무작위로 고른 400개의 쌍 (r,s)에 대해 수치적으로 확인하였다. 각 쌍마다 O, R, S를 지나는 원을 구하고, 인수분해(factorisation)를 확인한 뒤 $-30 \leq t \leq 30$ 범위를 훑었더니, 원의 방정식은 $t = r$와 $t = s$에서만 부호가 바뀌었다.

흔한 실수

- O를 지나는 원에는 상수항이 없다는 사실을 잊는 것. 일반적인 원에는 상수가 세 개 있으며, 상수항이 없어지는 것이 바로 인수 t^2이 나타나는 이유이다.
- 중근(double root) $t = 0$이 원이 O에서 C_1에 접한다는 뜻이라고 생각하는 것. 이것은 첨점에서 비롯된다. O를 지나는 모든 원이 인수 t^2을 준다.
- 판별식을 제곱의 합에 양의 상수를 더한 것에 음의 부호를 붙인 꼴로 쓰지 않고 "분명히 음수"라고만 말하는 것.

STEP 너머

곡선 $y^2 = x^3$은 특이 삼차곡선(singular cubic curve)의 대표적인 예이다. 여기서처럼 중복도(multiplicity)를 고려하여 교점을 세는 것은 베주(Bézout) 정리의 출발점이다. 이 정리에 따르면 차수가 m과 n인 두 곡선은 제대로 세었을 때 mn개의 점에서 만난다. 삼차곡선과 원은 6개의 교점을 가지며, 이는 O에서의 두 개, R, S, 그리고 두 복소수 점과 일치한다. 같은 비에트(Vieta)식 셈법이 타원곡선(elliptic curve) 위의 군 법칙(group law)을 이끌어낸다. Reid의 *Undergraduate Algebraic Geometry*(학부 대수기하학)와 Silverman과 Tate의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)는 모두 이러한 아이디어를 더 깊이 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.