풀이

STEP III 1992, 문제 2

순수수학 • 행렬의 거듭제곱과 수학적 귀납법

STEP III 1992, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q2

핵심 아이디어

모든 것은 $\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{J}$라는 한 가지 사실에 달려 있다. 이 사실 때문에 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ 꼴의 행렬끼리의 곱은 다시 같은 꼴이 되므로, 우리는 언제나 수 하나만 추적하면 된다. 다루기 어려워 보이는 식 $\frac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]$도 곱셈에 대해 좋은 성질을 보이는 것이 p가 아니라 $1+2p$라는 점을 알아차리면 명쾌해진다.

풀이

곱셈 규칙

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}$$

이고 $\mathbf{I}$는 모든 행렬과 교환(commute)하므로, 임의의 실수 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

$$(\mathbf{I} + p\mathbf{J})(\mathbf{I} + q\mathbf{J}) = \mathbf{I} + (p+q)\mathbf{J} + pq\mathbf{J}^2 = \mathbf{I} + (p+q+2pq)\mathbf{J}. \qquad (*)$$

여기서

$$1 + 2(p+q+2pq) = (1+2p)(1+2q)$$

임에 주목하자. 따라서 행렬 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$에 수 $1+2p$를 대응시키면, 행렬의 곱셈은 이 수들의 곱셈에 대응한다. $\mathbf{A} = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$에 대응하는 수는 $1+2a$이다.

제곱과 세제곱

$(*)$에 $p = q = a$를 대입하면

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + (2a + 2a^2)\mathbf{J}, \qquad \text{그리고} \qquad \tfrac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1] = \tfrac{1}{2}(4a + 4a^2) = 2a + 2a^2,$$

이므로 요구한 대로 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]\mathbf{J}$이다.

세제곱은 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}$로 쓰고 $(*)$에 $p = 2a + 2a^2$, $q = a$를 대입한다.

$$\begin{aligned} p + q + 2pq &= 2a + 2a^2 + a + 2a(2a + 2a^2) \\ &= 3a + 6a^2 + 4a^3 \\ &= \tfrac{1}{2}(6a + 12a^2 + 8a^3) = \tfrac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1], \end{aligned}$$

여기서 $(1+2a)^3 = 1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$을 이용하였다. 따라서 요구한 대로 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1]\mathbf{J}$이다.

네제곱은 $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$로 계산하는 것이 가장 빠르다. $p = q = \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]$이라 하면 $1 + 2p = (1+2a)^2$이므로, $\mathbf{A}^4$에 대응하는 수는 $(1+2a)^2(1+2a)^2 = (1+2a)^4$이다. 따라서

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}[(1+2a)^4 - 1]\mathbf{J} = \mathbf{I} + (4a + 12a^2 + 16a^3 + 8a^4)\mathbf{J}.$$

일반적인 거듭제곱

지금까지의 규칙으로부터 다음과 같이 추측할 수 있다.

$$p_k = \tfrac{1}{2}[(1+2a)^k - 1], \qquad \text{동치로} \qquad 1 + 2p_k = (1+2a)^k.$$

모든 정수 $k \geq 1$에 대하여 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(*base case*). $k = 1$일 때 $p_1 = \frac{1}{2}(1 + 2a - 1) = a$이고 $\mathbf{A}^1 = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$이다. (이 공식은 $p_0 = 0$도 주는데, 이는 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$와 일치한다.)

귀납 단계(*inductive step*). 위와 같은 p_k에 대하여 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$라고 가정하자. 그러면 $(*)$에 의해

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{I} + (p_k + a + 2ap_k)\mathbf{J},$$

이고

$$\begin{aligned} p_k + a + 2ap_k &= (1+2a)p_k + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)[(1+2a)^k - 1] + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)^{k+1} - \tfrac{1}{2}(1+2a) + a \\ &= \tfrac{1}{2}[(1+2a)^{k+1} - 1] = p_{k+1}. \end{aligned}$$

따라서 $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I} + p_{k+1}\mathbf{J}$이고, 수학적 귀납법에 의해

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]\mathbf{J} \qquad \text{모든 정수} k \geq 1.$$

생각해 보기 $\mathbf{A}^2$과 $\mathbf{A}^3$이 주어지지 않았다면, p_k에 대한 추측은 어디서 얻을 수 있었을까?

점화식 자체에서 얻을 수 있다. 귀납 단계는 $p_{k+1} = (1+2a)p_k + a$임을 보여 주는데, 이는 1계 선형 점화식(first-order linear recurrence)이다. 양변에 $\frac{1}{2}$을 더하면 $p_{k+1} + \frac{1}{2} = (1+2a)(p_k + \frac{1}{2})$이므로, $p_k + \frac{1}{2}$은 공비가 $1+2a$이고 첫째항이 $a + \frac{1}{2}$인 등비수열(geometric sequence)이다. 이것이 바로 $p_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+2a)^k$이다.

음의 거듭제곱(덤). $a \neq -\frac{1}{2}$이면 이 공식은 $k = -1$일 때도 성립한다. $p_{-1} = -\dfrac{a}{1+2a}$이고, $(*)$에 의해 $a + p_{-1} + 2ap_{-1} = a - \dfrac{a(1+2a)}{1+2a} = 0$이므로 $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})(\mathbf{I} + p_{-1}\mathbf{J}) = \mathbf{I}$이다. $a = -\frac{1}{2}$이면 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$는 특이행렬(singular matrix)이고, 공식은 모든 $k \geq 1$에 대하여 $p_k = -\frac{1}{2}$을 준다. 실제로 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$이다.

검산

- $a = 1$로 두면 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이고, 직접 곱해 보면 $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$이다. 공식은 $p_2 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$와 $p_4 = \frac{1}{2}(81-1) = 40$을 준다.
- $\mathbf{A}$는 고윳값(eigenvalue) $1+2a$에 대한 고유벡터(eigenvector) $(1,1)$과 고윳값 1에 대한 고유벡터 $(1,-1)$을 가진다. 따라서 $\mathbf{A}^k$의 고윳값은 $(1+2a)^k$과 1이다. 행렬 $\mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$의 고윳값은 $1 + 2p_k$과 1이므로 서로 일치한다.
- $0 \leq k \leq 12$와 $a = -\frac{1}{2}$을 포함한 마흔 개의 무작위 a 값에 대하여, 정확한 유리수 연산으로 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})^k$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하는 것은 ($\mathbf{I}$와 $\mathbf{J}$가 교환하므로) 정당하지만, $\mathbf{J}^r = 2^{r-1}\mathbf{J}$이지 $\mathbf{J}$가 아니라는 점을 잊으면 계수가 틀리게 된다.
- 귀납 단계에서 p_{k+1}에 대한 결론을 먼저 써 놓고 거꾸로 거슬러 올라가는 것은 증명이 아니다. $\mathbf{A}^k\mathbf{A}$에서 출발해야 한다.

STEP 너머

우리가 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$에 대응시킨 수 $1 + 2p$는 벡터 $(1, 1)$에 대한 그 행렬의 고윳값이다. 이런 꼴의 행렬은 모두 고유벡터 $(1, 1)$과 $(1, -1)$을 공유하므로, 모두 같은 기저 변환(change of basis)으로 대각화되고, 거듭제곱은 고윳값을 단순히 k제곱하여 계산할 수 있다. 이것이 대각화(diagonalisation)의 바탕에 있는 아이디어이며, 대각화는 행렬의 거듭제곱, 행렬 지수함수(matrix exponential), 선형 점화식을 스칼라 계산으로 바꾸어 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 많은 예제와 함께 이 아이디어를 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.