풀이

STEP III 1992, 문제 15

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP III 1992, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q15

핵심 아이디어

염소의 위치는 들판 전체에서 균등(uniform)하게 분포하므로, 모든 확률은 넓이를 a^2으로 나눈 값일 뿐이다. 따라서 문제 전체는 정사각형 가운데 꼭짓점 O로부터 거리 r 이내에 있는 부분의 넓이를 구하는 일로 귀결된다. r이 a를 넘어서면 사분원이 정사각형 밖으로 넘쳐 나가는데, 안쪽에 남은 넓이를 구하는 깔끔한 방법은 그 부분을 직각삼각형 두 개와 부채꼴(sector) 하나로 자르는 것이다. 그다음 밀도는 미분으로 얻어지고, 묶인 염소 문제도 영역만 다를 뿐 같은 아이디어이다.

풀이

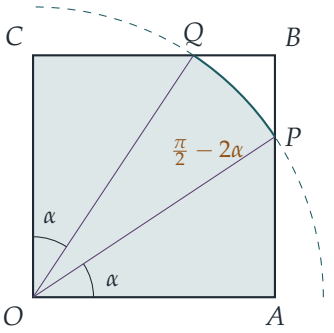
O를 원점에 두고 OA를 x축 위에, OC를 y축 위에 놓아 들판이 $0 \le x \le a, 0 \le y \le a$가 되도록 한다. $F(r) = \mathrm{P}(R < r)$라 두면, 이는 들판 가운데 $x^2 + y^2 < r^2$인 부분의 넓이를 a^2으로 나눈 값이다.

R의 분포

$0 < r \le a$일 때. O를 중심으로 하는 반지름 r인 사분원판은 들판 안에 완전히 들어 있으므로

$$F(r) = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{4a^2}.$$

$a \le r \le a\sqrt{2}$일 때. 이제 호는 변 AB(직선 $x = a$)와 $P = (a, \sqrt{r^2 - a^2})$에서, 변 CB(직선 $y = a$)와 $Q = (\sqrt{r^2 - a^2}, a)$에서 만난다. $\alpha = \cos^{-1}(a/r)$라 두면, 이는 각 AOP이다($\cos \angle AOP = a/r$이기 때문이다). 대칭성에 의해 각 COQ도 α이다.



색칠한 영역(들판 가운데 O로부터 거리 r 이내인 부분)은 세 조각으로 나뉜다.

- 삼각형 OAP: A에서 직각이고 두 직각변이 a와 $\sqrt{r^2 - a^2}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2}$이다.
- 삼각형 OCQ: 앞의 삼각형과 합동이므로 넓이가 같다.
- 반지름 r, 중심각 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$인 부채꼴 OPQ: 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{\pi r^2}{4} - r^2\alpha$이다.

이들을 더하고 a^2으로 나누면

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{a^2} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\,\alpha \\ &= \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($r \geq a\sqrt{2}$이면 들판 전체가 O로부터 거리 r 이내에 있으므로 $F(r) = 1$이다. 실제로 $r = a\sqrt{2}$에서 위 공식은 마땅히 그래야 하듯 $1 + \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$을 준다.)

중앙값

$r = a$에서 $F(a) = \pi/4 \approx 0.785 > \frac{1}{2}$이므로, 중앙값(median) m은 간단한 공식이 성립하는 범위 $0 < m < a$에 있다.

$$\frac{\pi m^2}{4a^2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798a.$$

확률밀도함수

밀도는 $f(r) = F'(r)$이다. $0 < r < a$에서는 $f(r) = \dfrac{\pi r}{2a^2}$이다.

$a < r < a\sqrt{2}$에서는 $\cos^{-1}(a/r)$의 도함수(derivative)가 필요하다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - a^2/r^2}} \cdot \left(-\frac{a}{r^2}\right) = \frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

그러면 F의 각 항을 미분하여(마지막 항에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다)

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{\pi r}{2a^2} - \frac{2r}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}} \\ &= \frac{r}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

을 얻는다. 첫째 항과 마지막 항이 상쇄되기 때문이다. 따라서

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r}{2a^2}, & 0 < r \le a, \\ \dfrac{r}{a^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)\right), & a < r \le a\sqrt{2}, \\ 0, & \text{그 밖의 경우.} \end{cases}$$

이는 기하적으로도 납득이 된다. $f(r)\,\mathrm{d}r$은 (들판 안에 있는 반지름 r인 원의 호의 길이) $\times\, \mathrm{d}r/a^2$이고, 그 호의 중심각은 $r \le a$일 때 $\frac{\pi}{2}$, $r > a$일 때 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$이다. 두 식은 $r = a$에서 일치하며(둘 다 $\pi/(2a)$를 준다), f는 $\alpha = \pi/4$가 되는 $r = a\sqrt{2}$에서 0으로 떨어진다.

묶인 염소

묶이고 나면 염소는 들판 가운데 $R \le a$인 점들, 즉 O를 중심으로 하는 반지름 a인 사분원판에만 닿을 수 있고, 그 넓이는 $\frac{1}{4}\pi a^2$이다. 염소의 위치는 여전히 균등하게 분포하지만, 이제는 이 사분원판 위에서이다. 이것은 바로 원래 모형을 사건 $R \le a$로 조건화한 것이다.

? **생각해 보기** 울타리 OC로부터의 거리를 재는 좌표는 무엇인가?

OC가 y축 위에 있으므로 OC로부터의 거리는 x이다. 따라서 사분원판 가운데 $x > a/2$인 부분의 넓이가 필요하다.

$$\begin{aligned} \int_{a/2}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/2}^{a} \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}\,a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{12}\right) = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}\,a^2}{8}. \end{aligned}$$

(기하적으로 보면, 직선 $x = a/2$가 OA로부터 각 $\pi/3$인 곳에서 호와 만나므로, 이 넓이는 중심각 $\pi/3$인 부채꼴에서 두 변이 $a/2$와 $\sqrt{3}a/2$인 삼각형을 뺀 것이다.) 이를 넓이 $\frac{1}{4}\pi a^2$으로 나누면

$$\mathrm{P}\left(\text{울타리와의 거리} OC > \tfrac{a}{2} \,\middle|\, R \le a\right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.391.$$

검산

- 연속성(continuity): F의 두 공식 모두 $r = a$에서 $\pi/4$를 주고, $F(a\sqrt{2}) = 1$이다.

- 단위정사각형 안의 균등한 점 4×10^5개로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)을 해 보니 $r = 0.3, 0.7, 1.1, 1.25, 1.4$에서 $F(r)$과 소수점 아래 셋째 자리 정도까지 일치했다. 표본 중앙값은 0.7986으로 $\sqrt{2/\pi} = 0.7979$와 비교되고, 조건부 비율은 0.3914로 $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.3910$과 비교된다.
- 밀도를 $[0, a\sqrt{2}]$에서 수치적분하면 1이 되고, 여러 점에서 F의 수치 미분값과 일치한다.
- 묶인 염소의 답은 마땅히 그래야 하듯 $\frac{1}{2}$보다 작다. 사분원판은 OC에서 멀어질수록 가늘어지기 때문이다.

흔한 실수

- 중앙값을 구할 때 $r > a$에서는 F에 다른 공식이 필요하다는 점을 잊는 것. 먼저 $F(a) > \frac{1}{2}$임을 확인해 두면 좋은데, 이로써 중앙값이 쉬운 범위에 있음을 알 수 있다.
- 부채꼴의 중심각으로 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ 대신 $\frac{\pi}{2} - \alpha$를 쓰는 것. 양쪽에서 하나씩, 모서리 조각 두 개가 잘려 나간다.
- 묶인 염소 부분에서 a^2으로 나누는 것. 조건부 확률(conditional probability)은 사분원판의 넓이 $\frac{1}{4}\pi a^2$으로 나눈다.

STEP 너머

여기서 R은 어떤 영역에서 균등하게 고른 점의 함수이고, 그 분포는 $R < r$인 영역의 넓이를 재어 얻었다. 이것이 확률변수(random variable)의 함수의 분포를 구하는 일반적인 방법이며, 밀도 공식 $f(r) = (\text{호의 길이})/a^2$은 영역을 등위집합(level set)으로 잘라 내는 "공면적(coarea)" 아이디어를 처음 맛보는 것이다. 뷔퐁의 바늘(Buffon's needle)이나 정사각형 안의 두 무작위 점 사이의 거리 같은 문제도 같은 기하적 추론에 바탕을 둔다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문) 두 책 모두 연속 확률변수에 대한 이러한 기하적 접근을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.