풀이

STEP III 1992, 문제 14

역학 • 풀리는 줄의 동역학

> **STEP III 1992, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q14

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 각 θ에 의해 결정된다. 줄의 풀린 부분은 Q에서 원판에 접하고, 그 길이는 원판에서 풀려 나온 줄의 호의 길이와 같다. 따라서 P의 위치를 θ로 쉽게 나타낼 수 있다(이때 그려지는 곡선은 원의 **신개선**(*involute*)이다). 미분해 보면 P의 속도는 줄에 수직임을 알 수 있다. 따라서 줄의 장력(tension)은 일을 하지 않고, 운동 방향으로는 마찰력(friction)만 작용한다. 그러면 PQ 방향과 그에 수직인 방향으로 분해하는 것만으로 문제가 깔끔하게 두 부분으로 나뉜다.

풀이

P의 위치

P를 수평인 탁자 위의 입자로, 저항은 주어진 마찰력뿐이라고 모형화하고, 줄은 가볍고 늘어나지 않는다고 하자. 중력과 수직항력은 서로 상쇄되므로, 수평 방향의 힘은 PQ 방향의 장력 T와 마찰력뿐이다.

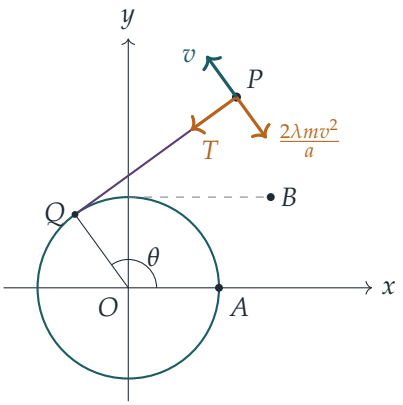
$A = (a, 0)$을 x축 위에 잡으면 접점은 $Q = (a\cos\theta, a\sin\theta)$이다. P가 A에 있을 때는 줄 전체가 원판 위에 감겨 있었다. 줄이 늘어나지 않으므로, 풀린 부분 QP의 길이는 풀려 나온 호 AQ의 길이, 즉 $a\theta$와 같다. 줄은 Q에서 접하므로 QP는 OQ에 수직이고, 단위벡터 $(\sin\theta, -\cos\theta)$의 방향이다($\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 이는 $(1, 0)$으로, 그림에서처럼 원판의 꼭대기에서 B를 향한다). 따라서

$$\overrightarrow{OP} = a(\cos\theta, \sin\theta) + a\theta(\sin\theta, -\cos\theta),$$

이므로

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta.$$

첫째 식이 구하는 x좌표이다. B에서 풀린 줄은 OA에 평행하고 원판의 꼭대기에서 접하므로, 그곳에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 $B = (\frac{\pi a}{2}, a)$이다.



속도와 가속도

OQ 방향의 단위벡터를 $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$, P에서 Q를 향하는 단위벡터(위에서 쓴 줄 방향의 반대)를 $\mathbf{f} = (-\sin\theta, \cos\theta)$라 하자. $\dot{\mathbf{e}} = \dot\theta\,\mathbf{f}$이고 $\dot{\mathbf{f}} = -\dot\theta\,\mathbf{e}$임에 주목한다.

x와 y를 미분하면

$$\dot x = (-a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = (a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta\sin\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\sin\theta,$$

이므로 속도는 $a\theta\dot\theta\,\mathbf{e}$이다. 즉 속도는 OQ에 평행하고, 따라서 줄에 수직이다. 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하면

$$\ddot{\mathbf{r}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta\,\dot{\mathbf{e}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta^2\,\mathbf{f}.$$

따라서 가속도의 PQ 방향(Q를 향하는) 성분은 $a\theta\dot\theta^2$이고, PQ에 수직인 방향($\mathbf{e}$ 방향) 성분은 $a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta$이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

운동 방정식

B에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 속도는 $a\cdot\frac{\pi}{2}\,\dot\theta\,(0,1)$이다. OA에 수직이면서 OA에서 멀어지는 방향으로 쏘아 보낸다는 것은 양의 y 방향으로 속도 V를 준다는 뜻이므로

$$\dot\theta = \frac{2V}{\pi a} > 0 \quad \text{(처음에)}.$$

$\dot\theta > 0$인 동안 속력은 $v = a\theta\dot\theta$이고 운동 방향은 $+\mathbf{e}$이므로, 크기가 $2\lambda mv^2/a = 2\lambda ma\theta^2\dot\theta^2$인 마찰력이 $-\mathbf{e}$ 방향으로 작용한다. 장력은 $\mathbf{f}$ 방향으로 작용하므로 $\mathbf{e}$ 성분이 없다.

생각해 보기 θ만의 방정식을 얻으려면 두 가속도 성분 중 어느 것을 써야 할까?

수직 성분이다. 장력 T는 미지수이고, PQ 방향 성분에만 나타나기 때문이다. PQ에 수직인 방향으로 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 쓰면

$$m(a\dot{\theta}^2 + a\theta\ddot{\theta}) = -2\lambda ma\theta^2\dot{\theta}^2.$$

$ma\theta\dot{\theta}$로 나누면($\theta > 0$이고 $\dot{\theta} > 0$이므로 나눌 수 있다)

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\left(\frac{1}{\theta} + 2\lambda\theta\right)\dot{\theta},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

$\dot{\theta}$ 구하기

좌변은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dot{\theta}$이고, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 우변은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\ln\theta - \lambda\theta^2)$이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln(\theta\dot{\theta}) + \lambda\theta^2\right) = 0, \qquad \text{그러므로} \qquad \theta\dot{\theta}\,\mathrm{e}^{\lambda\theta^2} = \text{상수}.$$

B에서 이 상수는 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2V}{\pi a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4} = \frac{V}{a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}$이다. 따라서

$$\dot{\theta} = \frac{V}{a\theta}\exp\left(\lambda\left(\frac{\pi^2}{4} - \theta^2\right)\right).$$

이 값은 모든 θ에 대하여 양수이므로 $\dot{\theta}$는 결코 0이 되지 않고, 위에서 사용한 가정 $\dot{\theta} > 0$은 운동 내내 성립한다. (답에는 θ, λ, a뿐 아니라 V도 반드시 들어간다.) 같은 말로, 속력은 $v = a\theta\dot{\theta} = V\mathrm{e}^{\lambda(\pi^2/4-\theta^2)}$이다.

$\theta = \pi$에서의 장력

PQ 방향의 힘은 Q를 향하는 T뿐이므로 $T = ma\theta\dot{\theta}^2$이다. $\theta = \pi$에서

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{2\lambda(\pi^2/4-\pi^2)} = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2},$$

이므로

$$T = ma\pi\cdot\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2} = \frac{mV^2}{\pi a}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}.$$

검산

- 풀린 줄 PQ의 길이는 $a\theta$이고 이는 신개선의 곡률 반지름(radius of curvature)이다. 따라서 Q는 곡률 중심이고, Q를 향하는 성분은 $v^2/(a\theta) = a\theta\dot{\theta}^2$이어야 한다. 실제로 그렇다.

- $\lambda = 0$(마찰 없음)이면 속력은 V로 유지된다. 장력이 운동에 수직이어서 일을 하지 않으므로 당연한 결과이다. $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $T = mV^2/(\frac{\pi}{2}a)$이고, 이는 B에서의 줄 길이 $r = \frac{\pi a}{2}$에 대한 mv^2/r이다.
- 수치적으로 $a = 1.3, m = 0.7, V = 2.1, \lambda = 0.25$로 놓고 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 θ에 대한 방정식을 풀었더니, $\dot{\theta}$에 대한 공식과 10^{-14}까지 일치하였다. (x, y)의 유한 차분 가속도도 두 성분과 마찰력 모두와 일치하였고, $\theta = \pi$에서 $T \approx 0.018667$을 주어 공식과 맞았다.

흔한 실수

- 초깃값으로 $\theta = 0$을 쓰는 것. 입자는 A가 아니라 $\theta = \frac{\pi}{2}$인 B에서 출발한다.
- $\dot{\theta}$를 구하려고 PQ 방향으로 분해하는 것. 그 방정식에는 미지의 장력이 들어 있고, 마찰력은 그 방향 성분이 없다.
- 마찰력이 줄 방향이 아니라 OQ 방향인 속도의 반대 방향으로 작용한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

P의 경로는 원의 신개선이다. 이는 실패에서 팽팽하게 풀려 나오는 줄의 끝이 그리는 곡선이며, 대부분의 톱니바퀴 이의 모양에 쓰이는 곡선이다. 여기서 사용한 사실들(속도가 줄에 수직이라는 것, 줄의 길이가 곡률 반지름이라는 것)은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 축폐선(evolute)과 신개선 사이의 관계의 특수한 경우이다. 역학적으로 보면, 이 문제는 고유 성분(intrinsic components, 접선 성분과 법선 성분)을 사용하여 알려진 힘과 미지의 구속력(constraint force)을 분리하는 좋은 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 극좌표와 고유 좌표에서의 운동, 그리고 구속 운동을 이러한 관점에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.