풀이

STEP III 1992, 문제 13

역학 • 고정축에 대한 회전

> **STEP III 1992, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q13

핵심 아이디어

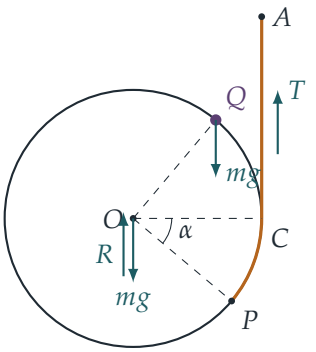
축이 고정되어 있으므로 원판과 입자는 하나의 강체(rigid body)를 이루고, 좌표는 돌아간 각 하나뿐이다. 에너지 보존(conservation of energy)(탄성, 중력, 운동 에너지)으로부터 모든 위치에서의 각속력(angular speed)을 얻을 수 있고, "P가 C에 도달한다"는 것은 가는 도중에 운동 에너지(kinetic energy)가 한 번도 0으로 떨어지지 않는다는 뜻일 뿐이다. C에서의 각속력을 구하고 나면, 축에 작용하는 반작용(reaction)은 전체 계의 질량중심(centre of mass)에 뉴턴(Newton) 제2법칙(Newton's second law)을 적용하여 얻는다.

풀이

모형과 기하

Q는 입자로, 줄은 가볍다고 본다. 테두리는 매끄럽다고 보므로 장력(tension) T는 줄 전체에서 같고, 줄이 테두리에 가하는 수직 접촉력은 O를 지난다. 따라서 O에 대한 줄의 모멘트(moment)는 P에서 접선 방향으로 당기는 장력의 모멘트뿐이며, 그 크기는 $2bT$이다. (장력이 줄이 테두리를 떠나는 점 C에서 AC를 따라 연직 위로, O로부터 거리 $2b$인 곳에 작용한다고 보아도 정확히 같은 모멘트가 나온다.)

$\alpha = \angle POC$라 하고, P는 OC 아래에 있다고 하자. 놓는 순간 $\alpha = \frac{\pi}{2}$이고, P는 $\alpha = 0$일 때 C에 도달한다. $\angle POQ = 90^\circ$이므로 OQ는 OC 위로 각 $\frac{\pi}{2} - \alpha$를 이루고, 따라서 Q는 O보다 $2b\cos\alpha$만큼 높이 있다. 특히 Q는 처음에 O와 같은 높이(C)에서 출발하고, P가 C에 도달할 때 O의 바로 위에 있다.



줄의 전체 길이는 $AC + \text{호}CP = \pi b + 2b\alpha$이고 자연 길이(natural length)는 πb이므로, 늘어난 길이(extension)는 $2b\alpha$이다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해

$$T = \frac{kmg \cdot 2b\alpha}{\pi b} = \frac{2kmg\alpha}{\pi},$$

이고, 저장된 탄성 에너지(elastic energy)는

$$E(\alpha) = \frac{kmg\,(2b\alpha)^2}{2\pi b} = \frac{2kmgb\,\alpha^2}{\pi}.$$

이다.

축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 원판의 관성 모멘트에 테두리 위의 Q의 관성 모멘트를 더한 것이다.

$$I = \tfrac{1}{2}m(2b)^2 + m(2b)^2 = 6mb^2.$$

P가 C에 도달한다

원판이 돌아 P가 C를 향해 올라가면(α가 감소하면) 줄이 짧아지면서 탄성 에너지를 내놓고, 그동안 Q는 올라간다. 축은 고정되어 있고 매끄러우므로 에너지가 보존된다. 계는 $\alpha = \frac{\pi}{2}$에서 정지 상태로 출발하며, 이때 Q의 높이는 O를 기준으로 0이고 $E = \frac{1}{2}\pi kmgb$이므로

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 &= E\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - E(\alpha) - mg \cdot 2b\cos\alpha \\ &= \frac{2kmgb}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - 2mgb\cos\alpha.\end{aligned}$$

이다. 원판은 실제로 올바른 방향으로 돌기 시작한다. 놓는 순간 줄은 반지름 $2b$에서 $T = kmg$로 당기고, Q의 무게는 수평 거리 $2b$에서 반대 방향으로 작용하므로, 알짜 모멘트는 $2(k-1)mgb > 0$이다. $k > \frac{4}{\pi} > 1$이기 때문이다.

$[0, \frac{\pi}{2})$의 모든 α에서 운동 에너지가 양수로 유지되면, 즉

$$\frac{k}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) > \cos\alpha \qquad \text{단, } 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

이면 P는 C에 도달한다. $k > \frac{4}{\pi}$이고 $\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2 > 0$이므로 좌변은

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2},$$

보다 크다. 따라서 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $g(\alpha) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2} - \cos\alpha \geq 0$임을 보이면 충분하다.

? 생각해 보기 구간 전체에서 이차식과 $\cos\alpha$를 어떻게 비교할 수 있을까?

이계도함수(second derivative)를 살펴보자. $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$, $g'(\alpha) = -\frac{8\alpha}{\pi^2} + \sin\alpha$이므로 $g'(0) = 0$이고, $g''(\alpha) = \cos\alpha - \frac{8}{\pi^2}$이다. $\frac{8}{\pi^2} < 1$이고 $\cos\alpha$는 1에서 0으로 감소하므로, $[0, \alpha_0)$에서 $g'' > 0$이고 $(\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$에서 $g'' < 0$인 α_0가 단 하나 존재한다.

- $[0, \alpha_0]$에서 g'는 $g'(0) = 0$에서부터 증가하므로 $g' \geq 0$이고 $g \geq g(0) = 0$이다.
- $[\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$에서 g는 오목(concave)하므로, 그 그래프는 양 끝값 $g(\alpha_0) \geq 0$과 $g(\frac{\pi}{2}) = 0$을 잇는 현(chord)보다 위에 있다. 따라서 여기서도 $g \geq 0$이다.

그러므로 구간 전체에서 $g \geq 0$이고, 엄격한 부등식 $k > \frac{4}{\pi}$ 때문에 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 운동 에너지는 엄격하게 양수이다. 원판은 $\alpha = 0$이 되기 전에 결코 멈추지 않으므로 P는 C에 도달한다. 특히 C에서($\alpha = 0$을 대입하면)

$$3mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{\pi kmgb}{2} - 2mgb \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{(\pi k - 4)g}{6b},$$

이다. 여기서 ω는 P가 C에 있을 때의 각속력이다. (조건 $k > \frac{4}{\pi}$가 어디서 나오는지 여기서 알 수 있다. 이 조건은 정확히 $\omega^2 > 0$이 되게 하는 조건이다.)

축에 작용하는 반작용

P가 C에 있을 때 두 가지 일이 동시에 일어난다.

- 줄이 자연 길이가 되므로($AC = \pi b$이고 호는 사라진다) $T = 0$이다.
- Q가 O의 연직 위에 있으므로, 그 무게는 O에 대한 모멘트를 갖지 않는다.

따라서 그 순간 축에 대한 모멘트는 없고, 각가속도(angular acceleration)는 0이다. 원판의 중심 O는 고정되어 있고 Q는 반지름 $2b$인 원 위를 각가속도 0으로 움직이므로, Q의 가속도는 순수하게 구심(centripetal) 가속도이다. 즉 크기는 $2b\omega^2$이고 방향은 Q에서 O를 향하는, 곧 연직 아래 방향이다.

? 생각해 보기 반작용을 구하는 식에는 어떤 힘들이 들어가는가?

전체 계(원판과 Q)에 연직 방향으로 뉴턴 제2법칙을 적용하자. 외력은 아래로 향하는 두 무게 $2mg$, 축에 위로 작용하는 반작용 R, 그리고 이 순간 0인 줄의 장력이다. Q와 원판 사이의

내력은 서로 상쇄된다. 가속하는 것은 Q뿐이므로

$$R - 2mg = m\left(-2b\omega^2\right),$$

이고, 따라서

$$R = 2mg - 2mb \cdot \frac{(\pi k - 4)g}{6b} = 2mg - \frac{mg(\pi k - 4)}{3} = \frac{mg(10 - \pi k)}{3},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (이 순간 Q는 수평 가속도가 없으므로 반작용의 수평 성분은 0이다.)

검산

- 경계값 $k = \frac{4}{\pi}$에서는 계가 $\omega = 0$으로 겨우 C까지 기어 올라가게 되고, 공식은 정지 상태의 값인 $R = 2mg$를 준다. 이는 앞뒤가 맞는다.
- 컴퓨터로 운동 방정식(equation of motion) $6mb^2\ddot{\psi} = 2bT - 2mgb\cos\psi$ (단, $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$)를 수치적으로 적분한다. $m = g = b = 1$, $k = 2$로 두면 $\omega^2 = 0.38053$으로 C에 도달하는데, 이는 $(2\pi - 4)/6$과 일치하고, $R = 1.23894 = (10 - 2\pi)/3$이다. $k = 1.29$, 1.5, 3에서도 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치한다.
- $k > \frac{10}{\pi}$이면 공식은 $R < 0$을 준다. 즉 축이 아래로 당겨야 한다. Q가 꼭대기를 충분히 빠르게 돌아 넘어가므로, 구심력으로 계의 무게보다 큰 힘이 필요하기 때문이다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 처음부터 끝까지 πb로 보는 것. 실제로는 P가 C에 도달하면서 0으로 줄어들며, 그래서 그곳에서 장력이 사라진다.
- 원판 자체의 관성 모멘트 $\frac{1}{2}m(2b)^2$을 잊고 Q의 관성 모멘트만 쓰는 것.
- C에서의 운동 에너지가 양수라는 것만 보이는 것. "P가 C에 도달한다"는 것은 그곳까지 가는 내내 운동 에너지가 양수로 유지되어야 한다는 뜻이다.

STEP 너머

마지막 단계는 "전체 외력은 전체 질량과 질량중심의 가속도의 곱과 같다"는 법칙의 강체 버전이며, 회전축에서의 반작용은 그 고전적인 응용이다. 대학 1학년 강체 동역학 과정에서는 이것을 각운동량(angular momentum) 방정식 $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\tau}$와 함께 다룬다. 부등식 $\cos\alpha \le 1 - 4\alpha^2/\pi^2$은 요르당 부등식(Jordan's inequality) $\sin x \ge 2x/\pi$의 사촌 격이며, 여기서는 표준적인 볼록성(convexity) 논증으로 증명하였다. Kleppner와 Kolenkow의 *An*

Introduction to Mechanics(역학 입문)는 고정축 회전과 회전축 반작용을 매우 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.