풀이

STEP III 1992, 문제 12

역학 • 운동량 보존

STEP III 1992, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

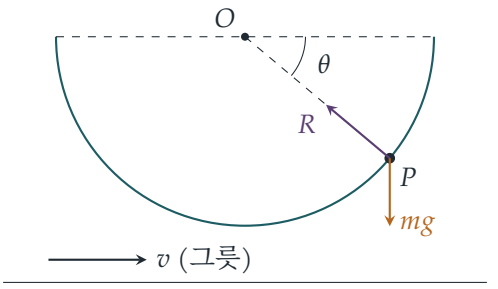
step.maths.org/questions/92-s3-q12

핵심 아이디어

그릇과 입자로 이루어진 계에는 외부에서 수평 방향으로 작용하는 힘이 없고, 중력 말고는 일을 하는 힘도 없다. 따라서 두 가지 보존 법칙(conservation law), 곧 수평 운동량(horizontal momentum) 보존과 에너지(energy) 보존을 쓸 수 있다. 운동량 보존은 그릇의 속력과 $\dot{\theta}$를 연결하고, 이어서 에너지 보존으로 v^2을 구한다. 반작용(reaction)을 구할 때 가장 깔끔한 방법은 그릇의 (가속하는) 좌표계에서 생각하는 것이다. 이 좌표계에서 입자는 단순히 O를 중심으로 원운동을 한다. 또한 반작용이 그릇에 작용하는 유일한 수평 방향의 힘이라는 사실도 기억해 두자.

풀이

모형. 그릇은 매끄러우므로 P에 작용하는 반작용 R은 법선 방향, 곧 PO 방향으로 작용한다. 받침대는 가볍고 탁자는 매끄러우므로, (받침대를 포함한) 그릇에 작용하는 수평 방향의 힘은 입자가 미는 힘의 수평 성분뿐이다. P가 테두리의 오른쪽 끝에서 출발한다고 하자. 그러면 P가 미끄러져 내려가면서 θ는 0부터 증가하고, 그릇은 오른쪽으로 움직인다.



수평 운동량 보존

그릇의 수평 위치를 X라 하면 $\dot{X} = v$이다. O에 대한 입자의 상대 위치는 $(a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$이므로, 입자의 위치는 $(X + a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$이고 속도는

$$(v - a\dot{\theta}\sin\theta,\ -a\dot{\theta}\cos\theta).$$

이다. 계에는 외부의 수평 방향 힘이 없고 계는 정지 상태에서 출발하므로, 전체 수평 운동량은 계속 0이다.

$$2mv + m(v - a\dot{\theta}\sin\theta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3v = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 이때 입자의 수평 속도는 $v - 3v = -2v$임에 주목하자. 입자는 그릇 속력의 두 배로 왼쪽으로 움직이는데, 그릇의 운동량 $2mv$를 상쇄하려면 당연히 그래야 한다.

에너지

반작용은 알짜 일을 하지 않고(내력이며 면이 매끄럽기 때문이다) 탁자도 일을 하지 않으므로, 에너지가 보존된다. OP가 각 θ를 이룰 때 입자는 $a\sin\theta$만큼 내려왔다. $a\dot{\theta} = 3v/\sin\theta$를 쓰면 입자의 연직 방향 속력은 $a\dot{\theta}\cos\theta = 3v\cot\theta$이므로

$$\begin{aligned} mga\sin\theta &= \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}m[(2v)^2 + 9v^2\cot^2\theta] \\ &= mv^2\left(3 + \tfrac{9}{2}\cot^2\theta\right). \end{aligned}$$

양변에 $2\sin^2\theta/m$을 곱하면

$$2ga\sin^3\theta = v^2(6\sin^2\theta + 9\cos^2\theta) = v^2(9 - 3\sin^2\theta),$$

이므로

$$v^2 = \frac{2ga\sin^3\theta}{3(3 - \sin^2\theta)},$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다.

반작용

> **생각해 보기** 그릇은 가속하고 있다. PO 방향으로 입자의 운동 방정식을 어떻게 세울까?

두 개의 방정식을 쓴다. 먼저 그릇에 대하여 생각하자. 입자는 O에서 P 방향으로 크기 R인 힘으로 그릇을 밀고, 이 힘의 수평 성분은 오른쪽으로 $R\cos\theta$이다. 따라서 그릇의 가속도 A는

$$2mA = R\cos\theta. \tag{1}$$

를 만족한다. 다음으로 입자에 대해서는 그릇의 좌표계에서 생각한다. 이 좌표계에서 입자는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위를 속력 $a\dot{\theta}$로 움직이고, R과 mg 외에 왼쪽으로 크기 mA인 가상의 힘(fictitious force)을 받는다. O를 향하는 방향(방향 $(-\cos\theta, \sin\theta)$)으로 분해하면 중력은 $-mg\sin\theta$, 가상의 힘은 $+mA\cos\theta$를 기여하므로

$$R - mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

이다. (같은 내용을 지면 좌표계에서 보면, 입자의 가속도는 그릇의 가속도 A에 그릇에 대한 입자의 원운동 가속도를 더한 것이다. 이를 PO 방향으로 분해하면 같은 방정식을 얻는다.)

앞의 두 결과로부터

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{9v^2}{a\sin^2\theta} = \frac{6g\sin\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

이다. (1)에서 얻은 $mA = \frac{1}{2}R\cos\theta$를 (2)에 대입하고 R이 있는 항을 모으면

$$R\left(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right) = mg\sin\theta + \frac{6mg\sin\theta}{3-\sin^2\theta} = mg\sin\theta\,\frac{9-\sin^2\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

이다. $1+\frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{2}(3-\sin^2\theta)$이므로

$$\boxed{R = \frac{2mg\sin\theta\,(9-\sin^2\theta)}{(3-\sin^2\theta)^2} = \frac{2mg\sin\theta\,(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}.}$$

검산

- 처음에 $\theta = 0$이면 $R = 0$이다. 마땅히 그래야 한다. 입자는 테두리에 정지해 있고, 입자를 그릇 쪽으로 누르는 것은 아무것도 없다.
- 바닥에서 $\theta = \frac{1}{2}\pi$이다. 이때 (1)에 의해 그릇의 가속도는 0이고, $a\dot{\theta}^2 = 3g$이며 $R - mg = 3mg$이므로 $R = 4mg$이다. 이는 공식에서 얻는 값 $2mg\cdot 8/2^2$과 일치한다.
- 그릇이 고정되어 있다면(무한히 무겁다면) 잘 알려진 결과는 $v_P^2 = 2ga\sin\theta$, $R = 3mg\sin\theta$이다. 그릇이 반동으로 움직이면 테두리 근처에서는 R이 더 작아지고(작은 θ에 대하여 $3mg\sin\theta$가 아니라 약 $2mg\sin\theta$이다. 그릇이 P에서 멀어지기 때문이다), 바닥에서는 더 커진다($3mg$가 아니라 $4mg$이다).
- 전체 운동 방정식을 수치적으로 단계별로 풀어 보면($m = 1.3$, $a = 0.7$, $g = 9.81$로 두고) 테두리에서 바닥까지 전 구간에서 $3v = a\dot{\theta}\sin\theta$, v^2에 대한 공식, R에 대한 공식이 모두 10^{-7} 이내의 오차로 재현되었다.

흔한 실수

- 그릇이 고정된 것처럼 $R - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2$이라고 쓰는 것. 그릇이 가속하므로, 입자의 가속도는 그릇에 대한 원운동 가속도만이 아니다.
- 입자의 운동 에너지로 $\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$을 쓰는 것. $a\dot{\theta}$는 그릇에 대한 입자의 상대 속력이지, 탁자에 대한 속력이 아니다.

STEP 너머

이 계는 자유도(degree of freedom)가 2인 계이며, 가장 깔끔하고 체계적으로 다루는 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)이다. 운동 에너지와 위치 에너지를 X와 θ로 나타내면, X가 라그랑지안에 나타나지 않으므로(즉 X는 "순환(cyclic)" 좌표이므로) 운동량 보존이 저절로 따라 나온다. 우리가 사용한 가상의 힘은 비관성 좌표계(non-inertial frame)에서의 역학 가운데 가장 간단한 경우이며, 대학 1학년 과정에서는 이를 원심력과 코리올리(Coriolis) 힘이 나타나는 회전 좌표계로 확장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 좌표계와 상호작용하는 물체들의 계를 모두 매우 잘 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.