풀이

STEP III 1992, 문제 11

역학 • 충돌과 반발계수

STEP III 1992, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

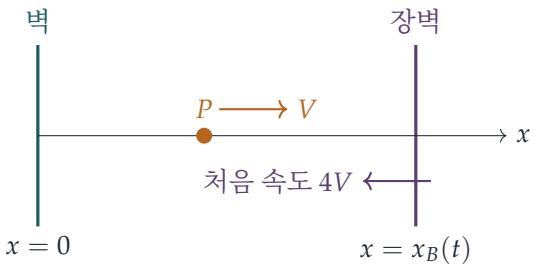
step.maths.org/questions/92-s3-q11

핵심 아이디어

모든 위치를 벽으로부터 측정하면, 입자와 장벽이 각각 벽까지의 거리를 간단한 식으로 나타낼 수 있다. 충돌(collision)이란 이 식들 중 두 개가 같아지는 순간일 뿐이므로, 시각을 묻는 각 질문은 이차방정식(quadratic)이 된다. 충돌할 때 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)은 상대 속도(relative velocity)에 적용되므로, 그 순간 장벽 자체의 속도가 중요하다.

풀이

P를 매끄러운(smooth) 탁자 위에서 O를 지나고 벽에 수직인 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. x를 벽 AB로부터의 거리로 잡고 장벽 쪽을 양의 방향으로 하며, 시각 t는 발사한 순간부터 잰다. 속도는 벽에서 멀어지는 방향일 때 양으로 한다.



첫 번째 충돌

장벽은 거리 $\frac{75}{32}VT$에서 속도 $-4V$로 출발하고 일정한 가속도 $+4V/T$를 가지므로, 등가속도 공식(constant-acceleration formulae)에 의해

$$x_B(t) = \tfrac{75}{32}VT - 4Vt + \frac{2Vt^2}{T}, \qquad v_B(t) = -4V + \frac{4Vt}{T}.$$

이다. 처음으로 무언가에 부딪히기 전까지 P는 일정한 속력으로 움직이므로(탁자가 매끄럽기 때문이다) $x_P = Vt$이다. 둘은 $x_P = x_B$일 때 만난다. $s = t/T$로 두면

$$2s^2 - 5s + \tfrac{75}{32} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 64s^2 - 160s + 75 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (8s-5)(8s-15) = 0.$$

이다. 첫 만남은 작은 근에서 일어나므로, 충돌은 문제에서 요구한 대로 $t = 5T/8$에 일어난다. (그 전까지 간격 $x_B - x_P$는 양수이다. $s = 0$에서 양수이고 그 사이에 근이 없기 때문이다.)

이 순간 P는 $x = \frac{5}{8}VT$에 있고 장벽의 속도는

$$v_B\left(\tfrac{5}{8}T\right) = -4V + \tfrac{5}{2}V = -\tfrac{3}{2}V,$$

이므로, 장벽은 여전히 속력 $\frac{3}{2}V$로 벽을 향해 움직이고 있다.

충돌 직후의 속력

장벽의 운동은 영향을 받지 않으므로 뉴턴의 실험 법칙만 있으면 된다. 접근 속력은 $V - (-\frac{3}{2}V) = \frac{5}{2}V$이다. 충돌 직후 P의 속도를 w라 하면 분리 속력은 $-\frac{3}{2}V - w$이고,

$$-\tfrac{3}{2}V - w = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}V \quad\Longrightarrow\quad w = -\tfrac{11}{4}V.$$

이다. 따라서 P는 속력 $\dfrac{11V}{4}$로 벽을 향해 튕겨 나간다.

> **?** **생각해 보기** 튕겨 나가는 속력이 왜 P가 원래 가지고 있던 속력 V보다 클까?

충돌하는 순간 장벽은 P를 향해 움직이고 있는데, 이는 배트가 공을 치는 것과 같다. 반발은 장벽에 대한 P의 속력에 작용한다. 장벽에 대해 P는 $\frac{5}{2}V$로 다가와서 $\frac{5}{4}V$로 떠난다. 여기에 벽을 향하는 장벽 자체의 속력 $\frac{3}{2}V$를 다시 더하면 $\frac{11}{4}V$가 된다.

벽에서 튕기기와 두 번째 충돌

P는 거리 $\frac{5}{8}VT$를 속력 $\frac{11}{4}V$로 이동해야 하므로, 시간 $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}T = \frac{5}{22}T$가 걸린다. 따라서 P가 AB에 부딪히는 시각은

$$t_1 = \tfrac{5}{8}T + \tfrac{5}{22}T = \tfrac{75}{88}T.$$

이다. 장벽이 그 사이에 끼어들 수는 없다. 이 구간 내내 장벽은 P보다 느리게 벽을 향해 움직이며(속력이 $\frac{3}{2}V$에서 줄어든다), 벽에 아예 도달하지 않는다. 장벽이 벽에 가장 가까워지는 때는 $t = T$이며, 이때 $v_B = 0$이고 $x_B = \frac{75}{32}VT - 4VT + 2VT = \frac{11}{32}VT > 0$이다.

벽은 고정되어 있으므로 $e = \frac{1}{2}$에 의해 입자는 속력 $\frac{11}{8}V$로 튕겨 나가고, 그 이후

$$x_P = \tfrac{11}{8}V\left(t - \tfrac{75}{88}T\right) = \tfrac{11}{8}Vt - \tfrac{75}{64}VT.$$

이다. 장벽과의 다음 충돌은 t_1 이후 처음으로 $x_P = x_B$가 되는 시각에 일어난다. $s = t/T$로 나타내면

$$\tfrac{75}{32} - 4s + 2s^2 = \tfrac{11}{8}s - \tfrac{75}{64} \iff 128s^2 - 344s + 225 = 0 \iff (8s-9)(16s-25) = 0.$$

이다. 근은 $s = \frac{9}{8}$과 $s = \frac{25}{16}$이다. $\frac{75}{88} < 1 < \frac{9}{8}$이므로 두 근 모두 t_1보다 나중이다. t_1에서 간격 $x_B - x_P = x_B(t_1)$은 양수이므로, 간격이 처음으로 0이 되는 때는 작은 근이다. 따라서 문제에서 요구한 대로 장벽과의 다음 충돌은 처음부터 시각 $9T/8$에 일어난다. (검산으로, 그때 둘 다 $x = \frac{3}{8}VT$에 있다.)

? 생각해 보기 왜 아무 근이나가 아니라 작은 근을 택해야 할까?

이 이차방정식은 두 운동이 마치 서로를 통과할 수 있는 것처럼 기술한다. 두 번째 근 $\frac{25}{16}T$는 실제 충돌 이후, 즉 운동이 이미 바뀐 뒤의 "만남"이 된다. 물리적인 충돌은 간격이 처음으로 0이 되는 때이다.

검산

- $t = \frac{5}{8}T$에서: $x_B = \frac{75}{32} - \frac{80}{32} + \frac{25}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$($VT$ 단위)이며, x_P와 같다.
- $t = \frac{9}{8}T$에서: $x_B = \frac{75}{32} - \frac{144}{32} + \frac{81}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$이고, $x_P = \frac{11}{8} \cdot \frac{24}{88} = \frac{3}{8}$이다.
- $V = T = 1$(시간 간격 10^{-6})로 한 시간 단계별 시뮬레이션에서 충돌은 $t \approx 0.6250$(튕겨 나간 속도 -2.750), $0.8523 \approx \frac{75}{88}$, 그리고 1.1250에서 나타났다.

흔한 실수

- 반발을 P의 속력에만 적용하여 $\frac{11}{4}V$ 대신 $\frac{1}{2}V$를 얻는 실수. 장벽이 움직이고 있으므로 상대 속도를 사용해야 한다.
- 가속도의 부호를 잘못 잡는 실수. 장벽은 벽을 향해 움직이기 **시작**하지만 감속하고 있으며, $t = T$에서 방향을 바꾼다.
- P가 AB에서 튕겨 나오기 전에 장벽이 P(또는 벽)에 도달하지 않는지 확인하는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

여기서의 멋진 요령은 충돌하는 순간 장벽의 기준틀(frame)에서 생각하는 것이다. 장벽의 질량이 매우 크기 때문에, 반발은 고정된 벽에서와 똑같이 상대 속도의 방향을 뒤집고 크기를 일정 비율로 바꾼다. 이렇게 기준틀을 바꾸는 것은 대학 1학년 역학의 핵심이며, 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)과 이체 충돌에서의 질량중심 기준틀(centre-of-mass frame)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.