풀이

STEP III 1992, 문제 10

순수수학 • 호의 길이와 넓이

STEP III 1992, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q10

핵심 아이디어

두 둘레(perimeter)는 모두 호의 길이(arc length)를 나타내는 적분인데, 이 적분들은 초등함수로 계산할 수 없다(이들은 **타원 적분**(*elliptic integral*)이다). 따라서 둘이 같음을 보이는 유일한 방법은 한 적분을 다른 적분으로 바꾸는 것이다. 각 곡선에 대해 호의 길이 요소를 쓰고, $\cos^2 + \sin^2 = 1$을 이용하여 각 피적분함수(integrand)를 간단히 한 다음, 치환(substitution)과 약간의 대칭성을 이용하면 두 적분이 같은 적분임을 알 수 있다. 넓이는 둘 다 직접 계산할 수 있으므로 더 쉽다.

(시험지에 인쇄된 범위는 $\frac{1}{4}\theta$로 끝난다. 이는 분명히 $\frac{1}{4}\pi$의 오식이므로, $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$로 본다.)

풀이

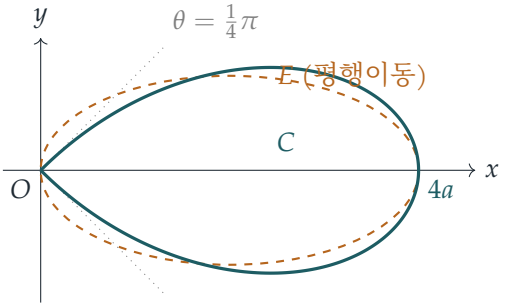
C의 개형 그리기

$-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$이면 $-\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$이므로, 이 범위 전체에서 $r = 4a\cos 2\theta > 0$이다($a > 0$으로 둔다). 몇 가지 특징은 다음과 같다.

- $r(-\theta) = r(\theta)$이므로 C는 시초선(initial line)에 대하여 대칭이다.
- 최댓값 $r = 4a$는 $\theta = 0$, 즉 점 $(4a, 0)$에서 나타난다.
- $\theta \to \pm\frac{1}{4}\pi$일 때 $r \to 0$이므로 곡선은 원점으로 들어가며, 원점에서 직선 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$에 접한다.

따라서 C는 하나의 닫힌 고리로, 네 잎 장미 곡선(rose curve) $r = 4a\cos 2\theta$의 잎 하나이며 양의 x축을 따라 놓여 있다. 그림은 C와 함께, 같은 구간 $0 \le x \le 4a$에 걸치도록 $2a$만큼 평

행이동한 E를 보여 준다.



C의 둘레

극곡선(polar curve)에서 호의 길이 요소는 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$를 만족한다. 여기서 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -8a\sin 2\theta$이므로

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= 16a^2\cos^2 2\theta + 64a^2\sin^2 2\theta \\ &= 16a^2\left(1 + 3\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

따라서 θ가 $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$를 움직일 때 고리가 한 번 그려지므로

$$\text{둘레}C = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4a\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\phi = 2\theta$로 치환하면 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$이고 적분 구간의 끝은 $\pm\frac{1}{2}\pi$가 된다.

$$\text{둘레}C = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

마지막 단계는 피적분함수가 ϕ에 대한 우함수(even function)이기 때문이다.

E의 둘레

$x = 2a\cos\phi$, $y = a\sin\phi$이면

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 4a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi = a^2\left(1 + 3\sin^2\phi\right),$$

이고, ϕ가 0부터 2π까지 움직일 때 E가 한 번 그려지므로

$$\text{둘레}E = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

? 생각해 보기 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$는 왜 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서의 적분의 네 배인가?

$g(\phi)=\sqrt{1+3\sin^2\phi}$라 하자. $\sin^2(\pi-\phi)=\sin^2\phi$이므로 $[\frac{1}{2}\pi,\pi]$에서 g의 그래프는 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서의 그래프를 거울에 비춘 모양이고, 따라서 $\int_0^{\pi}g=2\int_0^{\pi/2}g$이다. 또 $\sin^2(\phi+\pi)=\sin^2\phi$이므로 g는 주기(period)가 π이고, 따라서 $\int_{\pi}^{2\pi}g=\int_0^{\pi}g$이다. (기하학적으로는 타원의 네 사분면 부분의 길이가 모두 같다는 뜻이다.) 그러므로

$$\text{둘레}E=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

이고, 이는 C의 둘레에 대해 구한 식과 정확히 같다. 따라서 두 둘레는 같으며, 적분값을 계산할 필요는 전혀 없었다.

넓이

극곡선으로 둘러싸인 넓이는 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$이다. $\cos^2 2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$를 이용하면

$$\begin{aligned}\text{넓이}C&=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}16a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\Big[\theta+\tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}=4a^2\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi a^2.\end{aligned}$$

타원의 경우, 시계 반대 방향으로 그려지는 닫힌 곡선으로 둘러싸인 넓이는 $\frac{1}{2}\oint\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)\mathrm{d}\phi$이므로

$$\text{넓이}E=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2a^2\cos^2\phi+2a^2\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2\pi=2\pi a^2.$$

(마찬가지로, 이는 잘 알려진 공식 $\pi\times$반축$\times$반축$=\pi(2a)(a)$이다.) 따라서 두 넓이는 모두 $2\pi a^2$로 같다.

검산

- $a=1.7$일 때 각 곡선을 변이 200 000개인 다각형으로 근사하면 두 둘레가 모두 16.470362로 나오며, 이는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한 $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$의 값과 같다. 따라서 각 둘레는 약 $9.6884a$이다.
- 같은 다각형으로 구한 두 넓이는 모두 $18.158406=2\pi(1.7)^2$이었다.
- C의 넓이에 대한 타당성 검사: C는 넓이가 약 $8.8a^2$인 직사각형 $0\le x\le 4a$, $|y|\le 1.1a$ 안에 놓이며, $2\pi a^2\approx 6.3a^2$는 그 넓이에 대해 합리적인 비율이다.

흔한 실수

- $\phi = 2\theta$로 치환할 때 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 것. C에 대한 인수 $4a$는 $2a$가 되고, 우함수 단계를 거친 뒤에야 다시 $4a$가 된다.
- 극곡선의 넓이에 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 대신 $\int r\,\mathrm{d}\theta$를 쓰는 것.
- $0 \leq \theta < 2\pi$에서의 장미 곡선 $r = 4a\cos 2\theta$ 전체를 C로 취급하는 것. 주어진 범위는 잎 하나만을 골라낸다.

STEP 너머

적분 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$는 **제2종 완전 타원 적분**(*complete elliptic integral of the second kind*)이며, 초등함수인 원시함수(antiderivative)를 갖지 않는다. 문제에서 적분값의 계산을 금지한 것도 이 때문이다. 타원의 둘레는 닫힌 꼴로 나타낼 수 없다. 우리의 적분은 $k^2 = -3$인 경우이다. 이 적분은 $\sin^2\phi$를 $1 - \cos^2\phi$로 바꾼 다음 ϕ를 $\frac{1}{2}\pi - \phi$로 바꾸면 $0 < k < 1$인 표준형으로 다시 쓸 수 있다. 타원 적분은 타원 함수(elliptic function)와 타원 곡선(elliptic curve)으로 이어졌으며, 이들은 현대 정수론(number theory)의 중심에 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이처럼 극곡선과 매개변수 곡선의 호의 길이와 넓이를 비교하는 STEP 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.