풀이

STEP III 1992, 문제 1

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 1992, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 두 항등식(identity)은 도함수(derivative)를 만들어 내는 장치이다. 일단 f''을 f'으로 나타내고 나면, 더 높은 계의 도함수는 모두 다시 미분하기만 하면 얻어지고, $x = 0$에서는 모든 값이 $f'(0) = \frac{1}{2}$으로부터 만들어진다. 소문항 (ii)에서 문제가 되는 것은 원점에서 0이 되는 인수 $\sinh x$이다. x를 곱하면 이 영점이 상쇄되고, 그러면 전개식은 손으로 구할 수 있는 두 급수(series)의 곱이 된다. 대칭성(홀함수(odd function)와 짝함수(even function))을 이용하면 어떤 거듭제곱이 나타날 수 있는지 미리 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \ln(1 + e^x)$를 연쇄법칙(chain rule)으로 미분하면

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0,$$

이므로 그 로그가 정의되고,

$$\ln[f'(x)] = \ln e^x - \ln(1 + e^x) = x - f(x),$$

이다. 이것이 첫 번째 결과이다. 이 항등식을 미분하면 좌변은 $f''(x)/f'(x)$가 되므로

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = f'(x) - [f'(x)]^2,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. 이를 $f'' = f'(1 - f')$으로 쓰면 편리하다.

? **생각해 보기** $\ln(1+e^x)$를 네 번 미분하지 않고 f'''과 f''''을 어떻게 구할 수 있을까?

항등식 $f'' = f' - (f')^2$ 자체를 미분하되, $(f')^2$에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다.

$$f''' = f'' - 2f'f'' = f''(1-2f'),$$
$$f'''' = f'''(1-2f') - 2(f'')^2.$$

이제 $f(0) = \ln 2$이고 $f'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$인 $x = 0$에서 값을 구하면

$$f''(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$f'''(0) = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\right) = 0,$$
$$f''''(0) = 0 - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = -\tfrac{1}{8}.$$

매클로린 정리(Maclaurin's theorem)에 의해 $f(x) = \sum f^{(n)}(0)\, x^n/n!$이므로

$$f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots,$$

이고, x^3항은 0이다(또한 $-\frac{1}{8} \div 24 = -\frac{1}{192}$이다).

소문항 (ii)

g가 그러한 전개식을 갖지 않는 이유. 음이 아닌 거듭제곱으로 이루어진 급수 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$는 $x = 0$에서 유한한 값 a_0을 가지며, 그 점에서 연속(continuous)이다. 그런데 $\sinh 0 = 0$이고 $\cosh 0 = 1$이므로, $x \to 0$일 때 분모 $\sinh x \cosh 2x$는 0으로 다가간다. 실제로 작은 x에 대해 $\sinh x \approx x$이므로 $g(x) \approx 1/x$이고, 이는 0 근처에서 유계가 아니다. 따라서 원점 근처에서 $g(x)$는 그러한 급수와 같을 수 없다.

$xg(x)$가 그러한 전개식을 갖는 이유. 다음과 같이 쓴다.

$$x\,g(x) = \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\cosh 2x}.$$

$\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)$이므로 인수 x가 약분되어

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots},$$

이 된다. 이것은 상수항이 1인 급수로 1을 나눈 것이며, 이러한 역수는 음이 아닌 거듭제곱으로 이항전개(binomial expansion)할 수 있다. 마찬가지로 $\cosh 2x \geq 1$은 결코 0이 되지 않으므로 $1/\cosh 2x$도 같은 방식으로 전개된다. 그러한 두 급수의 곱도 다시 그러한 급수이다.

짝수 거듭제곱만 나타나는 이유. sinh는 홀함수이고 cosh는 짝함수이므로 $g(-x) = -g(x)$, 즉 g는 홀함수이다. 따라서 $h(x) = x\,g(x)$는 $h(-x) = (-x)(-g(x)) = h(x)$를 만족하므로 h는 짝함수이다. $h(x) = \sum a_n x^n$이라 하면 $h(x) - h(-x) = 2\sum_{n\text{ 홀수}} a_n x^n$은 항등적으로 0이고, 항등적으로 0인 거듭제곱급수(power series)는 모든 계수가 0이므로, 모든 홀수 n에 대해 $a_n = 0$이다. (직접 확인할 수도 있다. 위의 두 인수는 모두 x^2에 관한 급수이다.)

전개식. $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$으로 놓고 $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$를 이용하여 x^4까지의 항을 남기면

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \cdots,$$

이다. 여기서 $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360}$이다. 다음으로 ($\frac{(2x)^2}{2}$와 $\frac{(2x)^4}{24}$로부터) $\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$이므로, $v = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$으로 놓으면

$$\frac{1}{\cosh 2x} = 1 - v + v^2 - \cdots = 1 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^4 + 4x^4 + \cdots = 1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4 + \cdots.$$

두 급수를 곱하고 거듭제곱별로 정리하면

$$\begin{aligned} x\,g(x) &= \left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4\right)\left(1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\tfrac{10}{3} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{7}{360}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = \frac{1320}{360}$이다.

검산

- (i)에서 x^3항이 없는 것은 우연이 아니다. $f(x) - \frac{x}{2} = \ln(e^{-x/2} + e^{x/2}) = \ln(2\cosh\frac{x}{2})$는 짝함수이므로, $\frac{x}{2}$ 다음에는 짝수 거듭제곱만 나타난다.
- 수치적으로 $x = 0.1$에서 $\ln(1+e^x) \approx 0.7443966600$과 사차식 $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192}$은 약 3.5×10^{-10} 이내로 일치한다.
- $x = 0.05$에서 $x\,g(x)$와 $1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4$은 약 9×10^{-8}만큼, 즉 대략 $6x^6$만큼 차이가 난다. 다음 항이 x^6항이므로 예상대로이다.

흔한 실수

- $1/(1+u)$를 $1-u$까지만 전개하는 것: u^2항도 x^4에 기여한다(위의 $\frac{1}{36}$과 $4x^4$).
- $2x$의 4제곱이 $16x^4$임을 잊고 $\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{24}\cdots$로 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 **극**(*pole*)을 갖는 함수에 관한 것이다. g는 $1/x$처럼 발산하며, x를 곱하면 특이점(singularity)이 제거된다. 복소해석학(complex analysis)에서 이러한 함수는 **로랑 급수**(*Laurent series*) $\frac{1}{x}\left(1-\frac{13}{6}x^2+\cdots\right)$를 가지며, $1/x$의 계수(**유수**(*residue*)라 하며, 여기서는 1이다)는 많은 실수 적분을 계산하는 열쇠가 된다. 이 급수의 수렴반지름(radius of convergence)은 분모의 가장 가까운 다른 영점, 곧 $x=\pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$에서 $\cosh 2x=0$이 되는 점에 의해 정해진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 개념들을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.