풀이

STEP II 1992, 문제 9

순수수학 • 스칼라 삼중곱

> **STEP II 1992, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q9

핵심 아이디어

$\mathbf{r}$에 대한 식을 $\mathbf{a}$에 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$의 일차결합을 더한 꼴로 정리하면, 이것이 A, B, C를 지나는 평면임을 알 수 있다. 그 평면의 법선(normal)은 평면 위에 놓인 두 벡터의 외적(cross product)이고, 이 외적을 전개하면 문제에 나오는 세 개의 삼중곱(triple product)이 정확히 나타난다. 그다음에는 항등식이 **모든** λ와 μ에 대해 성립하므로, 편리한 값을 골라 대입하면 된다.

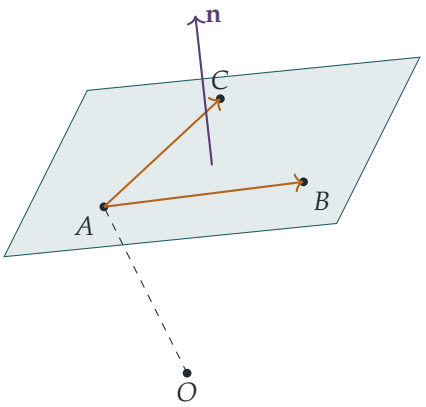
풀이

자취

방정식을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

이는 점 A에 두 벡터 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$와 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$의 임의의 일차결합을 더한 것이다. 이 두 벡터는 평행하지 않다. 만약 평행하다면 A, B, C가 한 직선 위에 놓이게 되고, 직선과 O는 항상 어떤 평면 위에 함께 놓이는데, 이는 가정에 의해 배제된다. 따라서 λ와 μ가 모든 실수 값을 가질 때 $\mathbf{r}$는 A, B, C**를 지나는 평면**을 그린다. $(\lambda,\mu)=(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$로 놓으면 각각 A, B, C 자신이 된다. O는 평면 ABC 위에 있지 않으므로, 이 평면은 원점을 지나지 않는다.



방정식 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$

평면의 법선은 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$에 모두 수직이므로 다음과 같이 잡는다.

$$\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

두 벡터가 평행하지 않으므로 이 벡터는 영벡터가 아니다. $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$과 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$를 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}\\&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

평면 위의 모든 점은 A와 $\mathbf{n}$에 수직인 벡터만큼 차이가 나므로 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$이다. $\mathbf{a}$는 $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$와 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$에 모두 수직이므로

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

따라서 평면의 방정식은 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$이다.

? **생각해 보기** $\mathbf{r}$의 매개변수 표현을 대입하면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$은 무엇이 되는가?

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}$이 필요하다. 벡터는 자신을 포함하는 외적과 항상 수직이므로, 각각에서 세 항 중 두 항이 사라진다.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\qquad\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

점 $\mathbf{r}=(1-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$는 모든 λ, μ에 대해 평면 위에 있으므로, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$로부터

$$(1-\lambda-\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

양변에서 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$를 빼면, 모든 스칼라 λ, μ에 대해

$$-(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

이 성립하고, 이것이 보이려던 식이다.

결론 이끌어 내기

항등식이 모든 λ와 μ에 대해 성립하므로, 항을 분리해 내는 값을 고른다.

- $\lambda = 1, \mu = 0$: $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0$.
- $\lambda = 0, \mu = 1$: $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$.

두 식을 합치면

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

(같은 말이지만, 좌변은 λ와 μ에 대한 일차식이고 항등적으로 0이므로 λ의 계수와 μ의 계수가 모두 0이어야 한다.)

A, B, C, O가 한 평면 위에 있을 때

이때 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$는 모두 O를 지나는 한 평면 위에 놓인다. 그러면 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$는 그 평면에 수직(또는 영벡터)이므로 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$이고, 마찬가지로 나머지 두 삼중곱도 0이 된다. 기하적으로 보면 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$가 만드는 평행육면체(parallelepiped)가 납작해져서 부피가 0이다. 결과는 여전히 참이지만, $0 = 0 = 0$이라는 자명한 형태로 성립한다. A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으면 자취는 여전히 평면이지만 원점을 지나므로 $p = 0$이고, 그 방정식은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$이다. A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$이고 자취는 직선(세 점이 모두 일치하면 한 점)일 뿐이므로, 이 논증으로는 아무런 정보도 얻을 수 없다.

검산

- $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$로 놓으면 세 삼중곱은 모두 1이고, $\mathbf{n} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $p = 1$이다. 즉 평면 $x + y + z = 1$이 되고, 이 평면은 실제로 세 점을 포함한다.
- 무작위 정수 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 순서쌍 2000개를 정확한 분수 계산으로 시험하였다. $\mathbf{n}$의 전개식, p의 값, 무작위 λ, μ에 대한 방정식 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$, 세 삼중곱의 상등이 모두 정확히 성립하였다. 한 평면 위에 있는 순서쌍에서는 모든 삼중곱이 0이었다.

흔한 실수

- $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$를 전개할 때의 부호 실수: 항 $-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$는 $+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$가 되고, $-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$는 $+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$가 된다.
- $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$인 이유를 밝히지 않는 것. 바로 이 부분에서 (세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않다는 사실을 통해) 네 점이 한 평면 위에 있지 않다는 조건이 쓰인다.

STEP 너머

스칼라 삼중곱(scalar triple product) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$는 행이 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$인 3×3 행렬식(determinant)이며, 여기서 증명한 순환 대칭성은 행을 순환 치환(cyclic permutation)하면(두 번의 자리바꿈) 행렬식이 변하지 않는다는 사실이다. 그 값은 세 벡터가 만드는 평행육면체의 부호 있는 부피이고, 세 벡터가 일차종속(linearly dependent)일 때, 즉 한 평면 위에 있을 때 정확히 0이 된다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 부피의 배율로서의 행렬식이라는 일반 이론으로 발전한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이를 명료하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.