풀이

STEP II 1992, 문제 8

순수수학 • 적분 기법

> **STEP II 1992, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q8

핵심 아이디어

세 소문항에 각각 하나씩, 모두 세 가지 표준 기법을 쓴다. (i)에서는 분모를 완전히 인수분해하고 **중복된** 인수가 있음을 알아차리므로, 부분분수(partial fractions)에 제곱항이 필요하다. (ii)에서는 치환(substitution) $t = \tan\frac{x}{2}$를 쓰면 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수(rational function)가 t의 유리함수로 바뀌는데, 여기서는 그 결과로 나온 이차식이 깔끔하게 인수분해된다. (iii)에서는 $\sinh x$를 지수함수로 나타내고 $u = \mathrm{e}^x$로 치환하면, 이번에도 부분분수가 남는다.

풀이

소문항 (i)

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$이므로 분모는 $(x-1)^2(x+1)$이다. 인수 $x-1$이 중복되므로

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

즉

$$x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

꼴을 찾는다. $x=1$을 대입하면 $1=2B$이므로 $B=\frac{1}{2}$이다. $x=-1$을 대입하면 $-1=4C$이므로 $C=-\frac{1}{4}$이다. x^2의 계수를 비교하면 $0=A+C$이므로 $A=\frac{1}{4}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}-\tfrac{1}{4}\ln|x+1|+c\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x-1)}+c.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

$t=\tan\frac{x}{2}$라 하자. 그러면

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

이고, 마지막 식은 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+t^2)$이기 때문이다. 따라서

$$3\cos x+4\sin x=\frac{3-3t^2+8t}{1+t^2}=\frac{(1+3t)(3-t)}{1+t^2},$$

이고, 인수 $1+t^2$가 약분된다.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+3t)(3-t)}.$$

? **생각해 보기** 이차식 $3+8t-3t^2$이 인수분해된다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

이 이차식의 판별식(discriminant)은 $64+36=100=10^2$으로 완전제곱수이므로, 두 근 $t=3$과 $t=-\frac{1}{3}$은 유리수이다. (이는 우연이 아니다. $3^2+4^2=5^2$이기 때문이며, 아래의 합성(harmonic form)에서 진폭이 정수가 되는 것도 같은 이유이다.)

이제 $\dfrac{2}{(1+3t)(3-t)}=\dfrac{a}{1+3t}+\dfrac{b}{3-t}$로 놓으면 $2=a(3-t)+b(1+3t)$이다. $t=3$을 대입하면 $b=\frac{1}{5}$이고, $t=-\frac{1}{3}$을 대입하면 $\frac{10}{3}a=2$이므로 $a=\frac{3}{5}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}&=\int\left(\frac{3}{5(1+3t)}+\frac{1}{5(3-t)}\right)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{5}\ln|1+3t|-\tfrac{1}{5}\ln|3-t|+c\\ &=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+c.\end{aligned}$$

다른 방법으로, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$인 β에 대하여 $3\cos x+4\sin x=5\sin(x+\beta)$로 쓸 수 있다. 그러면 적분은 $\frac{1}{5}\int\operatorname{cosec}(x+\beta)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\ln|\tan\frac{1}{2}(x+\beta)|+c$이다. 두 답은 일치한다. $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$이므로($\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{3/5}{9/5}$이기 때문이다), 덧셈정리에 의해

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+\beta)=\frac{t+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{1+3t}{3-t}.$$

이다.

소문항 (iii)

$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$이므로, 분자와 분모에 e^x를 곱하면

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1}.$$

이다. $u = \mathrm{e}^x$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2 - 1} &= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right| + c = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c,\end{aligned}$$

이다. 여기서 마지막 단계는 분자와 분모를 $\mathrm{e}^{x/2}$로 나눈 것이다. 즉 $\dfrac{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}} = \tanh\frac{x}{2}$이다. (ii)의 다른 방법에서 쓴 $\int \operatorname{cosec} x\,\mathrm{d}x = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$와 깔끔하게 대응한다는 점에 주목하자.

검산

각 답을 미분해 본다. 예를 들어 (iii)에서는 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\tanh\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sinh x}$이다. 수치적으로는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 (i)의 피적분함수의 $\int_2^5$는 0.548287, (ii)의 피적분함수의 $\int_0^1$는 0.234276, $\int_{1/2}^2 \operatorname{cosech} x\,\mathrm{d}x$는 1.134488이며, 각각 부정적분(antiderivative)으로 구한 값과 소수점 아래 12자리 이상까지 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 중복된 인수를 놓치고 $\frac{A}{x-1} + \frac{C}{x+1}$만으로 시도하거나, $x^2 - 1$이 인수분해된다는 사실 자체를 잊는 것.
- 로그 안의 절댓값 기호를 빠뜨리는 것. 피적분함수는 $x - 1$, $1 + 3t$, $\tanh\frac{x}{2}$가 음수인 경우에도 정의된다.
- (ii)에서 $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $\frac{2}{1+t^2}$를 잊는 것.

STEP 너머

치환 $t = \tan\frac{x}{2}$(바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고도 한다)는 $\sin x$와 $\cos x$의 **모든** 유리함수가 초등함수인 부정적분을 가진다는 것을 보여 준다. t의 모든 유리함수는 부분분수로 처리할 수 있기 때문이다. 그 배경에는 단위원을 유리함수로 매개화(parametrisation)하는 방법이 있으며, 이는 모든 피타고라스 세 쌍(Pythagorean

triples)을 만들어 내는 바로 그 매개화이다. 도대체 어떤 함수가 초등함수인 부정적분을 가지는가 하는 질문은 리우빌(Liouville)의 정리와 미분대수(differential algebra)로 이어진다. 적분의 해석학적 기초에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.