풀이

STEP II 1992, 문제 7

순수수학 • 삼차방정식의 중근

> **STEP II 1992, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q7

핵심 아이디어

$(x-a)(x-b)(x-c)$와 주어진 삼차식(cubic)의 계수를 비교(comparing coefficients)하면 p, q, r를 근(root)들의 대칭함수(symmetric function)로 나타낼 수 있다. (i)에서는 중근(repeated root)이 있다는 조건과 "근의 합이 0"이라는 조건으로부터 근이 $\alpha, \alpha, -2\alpha$ 꼴로 정해지고, 나머지는 모두 여기서 따라 나온다. (ii)의 식은 (i)의 답에서 q와 r를 더 복잡한 식으로 바꾼 것처럼 보인다. 이는 x를 평행이동하여 x^2항을 없앤 다음, 새로운 삼차식에 (i)을 적용하라는 암시이다.

풀이

a, b, c가 근이고 최고차항의 계수가 1이므로, 모든 x에 대하여

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

이다. 계수를 비교하면

$$p = a+b+c, \qquad q = ab+bc+ca, \qquad r = abc.$$

소문항 (i)

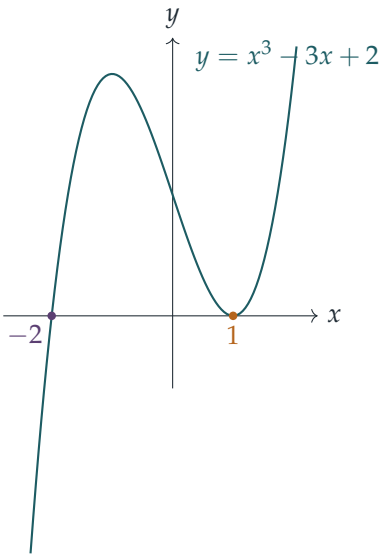
중근이 $a = b = \alpha$가 되도록 근에 이름을 붙이자. 그러면 $p = 0$에서 $c = -(a+b) = -2\alpha$이므로 근은 $\alpha, \alpha, -2\alpha$이다. 따라서

$$q = \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) + (-2\alpha)\alpha = -3\alpha^2,$$
$$r = \alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = -2\alpha^3.$$

그러므로

$$4q^3 + 27r^2 = 4(-27\alpha^6) + 27(4\alpha^6) = -108\alpha^6 + 108\alpha^6 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 여기서는 α가 실수일 필요가 전혀 없으며, 삼중근(triple root)인 경우($\alpha = 0$, 모든 계수가 0)도 포함된다.



예를 들어 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$는 $\alpha = 1, q = -3, r = -2$이고, $4(-27) + 27 \cdot 4 = 0$이다. 이중근은 그래프가 축에 접하는 모습으로 나타난다.

소문항 (ii)

이제 p가 0일 필요는 없다. 원래 삼차식의 근의 합은 p이므로 근의 평균은 $p/3$이다. 평균만큼 평행이동하여

$$x = y + \tfrac{p}{3}.$$

로 놓자. 그러면 $y = x - \frac{p}{3}$이므로, y에 대한 새 삼차식의 근은 $a - \frac{p}{3}, b - \frac{p}{3}, c - \frac{p}{3}$이다. 이들의 합은 $p - p = 0$이고, a, b, c 중 두 개가 같으면 이들 중 두 개도 같다.

생각해 보기 y에 대한 삼차식은 정확히 무엇인가?

각 항을 전개하면

$$\begin{aligned}
\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^3 &= y^3 + py^2 + \tfrac{p^2}{3}y + \tfrac{p^3}{27}, \\
-p\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^2 &= -py^2 - \tfrac{2p^2}{3}y - \tfrac{p^3}{9}, \\
q\left(y + \tfrac{p}{3}\right) &= qy + \tfrac{pq}{3},
\end{aligned}$$

이고, 이들과 $-r$를 모두 더하면 y^2항이 소거되어(이것이 평행이동의 목적이다)

$$x^3 - px^2 + qx - r = y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)y - \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right),$$

를 얻는다. 여기서 $\frac{p^3}{27} - \frac{p^3}{9} = -\frac{2p^3}{27}$을 이용하였다. 이 y에 대한 삼차식은 $y^3 - Py^2 + Qy - R$ 꼴이고

$$P = 0, \qquad Q = q - \frac{p^2}{3}, \qquad R = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

이다. 이 삼차식은 y^2의 계수가 0이고 두 근이 같으므로 소문항 (i)을 적용할 수 있고, $4Q^3 + 27R^2 = 0$, 즉

$$4\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right)^2 = 0,$$

을 얻는다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $p = 0$이면 (ii)의 결과는 $4q^3 + 27r^2 = 0$이 되어 소문항 (i)과 같다.
- $(x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$에 대하여 $p = 4, q = 5, r = 2$이므로 $Q = -\frac{1}{3}$이고 $R = \frac{128}{27} - \frac{20}{3} + 2 = \frac{2}{27}$이다. 그러면 $4Q^3 + 27R^2 = -\frac{4}{27} + \frac{4}{27} = 0$이다.
- 또한 중근을 갖는 무작위 삼차식 수백 개에 대하여 두 항등식을 정확한 유리수 연산으로 확인하였고, 평행이동 항등식도 무작위 점에서 확인하였다.

흔한 실수

- 비에트 공식(Vieta's formulae)에서 부호를 틀리는 것: 이 문제에서 택한 부호 $-p, +q, -r$에서는 p, q, r 세 개가 모두 근에 대하여 양의 부호로 나타난다.
- $p/3$만큼 반대 방향으로 평행이동하는 것. 새 삼차식의 근은 $a - \frac{p}{3}$ 등이며, 그래서 근의 합이 0이 된다.
- (ii)에서 모든 것을 a, a, c로 무작정 전개하는 것. 이 방법도 되기는 하지만 길고 실수하기 쉽다. 평행이동을 이용하면 (i)을 공짜로 다시 쓸 수 있다.

STEP 너머

일반적인 삼차식에서 (ii)의 좌변은 $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$, 즉 **판별식**(discriminant)의 음수와 같다. 이 값은 두 근이 일치할 때 정확히 0이 되며, 그 부호를 보면 실계수 삼차식이

세 실근을 갖는지 하나의 실근만 갖는지 알 수 있다. 평행이동 $x = y + \frac{p}{3}$은 삼차방정식을 푸는 카르다노(Cardano) 공식의 첫 단계이기도 하다. 근의 대칭함수, 판별식, 그리고 어떤 방정식이 거듭제곱근(radical)으로 풀리는가 하는 문제는 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 시작하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.