풀이

STEP II 1992, 문제 6

순수수학 • 접선과 근의 개수

> **STEP II 1992, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q6

핵심 아이디어

$kx = \ln(2\sec x)$의 해는 원점을 지나는 직선 $y = kx$가 곡선 $y = \ln(2\sec x)$와 만나는 점이다. 이 곡선은 원점보다 위에서 시작하고, 볼록(convex)하며, 무한대로 치솟는다. 따라서 원점을 지나는 직선은 이 곡선과 만나지 않거나, 접하거나, 두 번 만난다. 특별한 값 k_0은 **원점에서 그은 접선**(*tangent from the origin*)의 기울기이다. 접한다는 것은 두 곡선의 높이와 기울기가 같다는 뜻이며, 이 두 방정식에서 나머지가 모두 나온다.

풀이

두 그래프

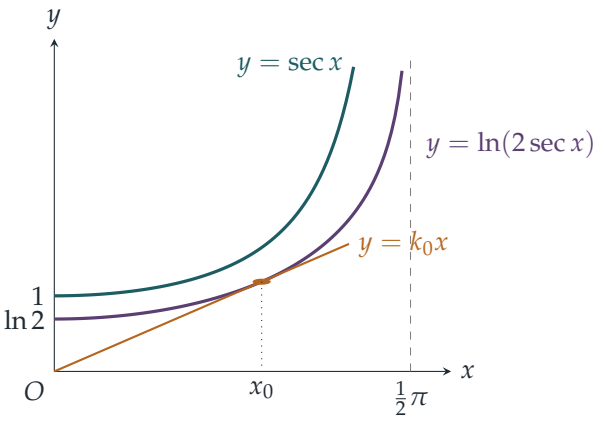
$f(x) = \ln(2\sec x) = \ln 2 - \ln\cos x$라 하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x > 0.$$

따라서 $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$, $f'(0) = 0$이고, f는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하며, 볼록(아래로 볼록)하다. 또 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $\cos x \to 0^+$이므로 $f(x) \to \infty$이다.

마찬가지로 $y = \sec x$는 $\sec 0 = 1$이고 기울기는 $\sec x \tan x$인데, 이 기울기는 $x = 0$에서 0이고 그 뒤로는 양수이며, $x \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $\sec x \to \infty$이다. 두 곡선 모두 수직 점근선(vertical asymptote) $x = \frac{1}{2}\pi$를 가지며, 둘 다 그곳에서는 정의되지 않는다.

로그 곡선은 항상 시컨트 곡선보다 아래에 있다. $u = \sec x \geq 1$로 두면 $\ln(2u) < u$인데, $\ln(2u) - u$의 도함수가 $\frac{1}{u} - 1 \leq 0$이므로 이 함수는 $u = 1$에서의 값인 $\ln 2 - 1 < 0$ 이하이기 때문이다. 또한 로그 곡선은 훨씬 더 느리게 증가한다. $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 이 곡선은 시컨트의 ln처럼 행동한다.



작은 k에서는 해가 없고, 큰 k에서는 해가 둘이다

f가 증가하므로 $[0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $f(x) \geq \ln 2$이고, 한편 그 구간에서 $kx < \frac{1}{2}\pi k$이다. $k \leq 2\ln 2/\pi \approx 0.44$이면 구간 전체에서 $kx < \ln 2 \leq f(x)$이므로, 직선은 곡선 아래로 지나가고 해는 없다.

큰 k에 대해서도 직선은 곡선 아래에서 시작하지만($x = 0$에서 직선의 높이는 $0 < \ln 2$), 어딘가에서 곡선 위로 올라갈 만큼 가파르다. $x = \frac{1}{4}\pi$에서 곡선의 높이는 $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.04$이고, $k > \frac{6}{\pi}\ln 2 \approx 1.32$이기만 하면 그곳에서 직선이 더 높다. $\frac{1}{2}\pi$ 근처에서 곡선은 무한대로 달아나지만 직선의 높이는 많아야 $\frac{1}{2}\pi k$에 머무르므로, 결국 곡선이 다시 직선보다 위로 온다. 직선은 올라가면서 곡선을 한 번 가로지르고, 다시 내려오면서 한 번 더 가로지른다. 즉 해가 두 개이다.

해가 셋 이상일 수는 없다. 함수 $f(x) - kx$의 이계도함수는 $\sec^2 x > 0$이므로 이 함수는 볼록하고, 볼록함수의 영점은 많아야 두 개이다.

k_0이 존재하는 이유

$f(0) = \ln 2 \neq 0$이므로 모든 해는 $x > 0$을 만족한다. 따라서 x로 나누어 방정식을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$k = g(x), \qquad \text{여기서} g(x) = \frac{\ln(2\sec x)}{x}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

그러므로 해의 개수는 g의 그래프가 높이 k에 도달하는 횟수와 같다. 이제

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \qquad h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x),$$

이고 $h'(x) = \tan x + x\sec^2 x - \tan x = x\sec^2 x > 0$이다. $h(0) = -\ln 2 < 0$이고 $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $h(x) \to \infty$이므로, h의 영점은 정확히 하나이며 이를 x_0이라 한다. 따라서 g는 $(0, x_0)$에서 감소하고 $(x_0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하며, 양 끝에서 $g \to \infty$이다($x \to 0$일 때 분자는

$\ln 2$로 수렴하고, $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 분자는 ∞로 발산한다). 그러므로 g의 최솟값을 $k_0 = g(x_0)$이라 하면 다음이 성립한다.

- $k < k_0$: 해가 없다.
- $k = k_0$: 해가 정확히 하나, $x = x_0$이다.
- $k > k_0$: 해가 두 개이다.

그래프로 보면 $y = k_0 x$는 원점을 지나는 $y = \ln(2\sec x)$의 접선이다. 이로써 개형을 이용한 논증이 확인되고, 경계값이 정확히 결정된다.

? **생각해 보기** 왜 "해가 정확히 하나"라는 것이 직선이 접선이라는 뜻일까?

직선이 x_0에서 곡선을 횡단적으로(transversally) 가로지른다면, 직선을 O를 중심으로 조금 회전시켜도(k를 조금 작게 하거나 크게 해도) 근처에서 여전히 교점이 생기고, 위의 볼록성 논증에 의해 두 번째 교점도 생긴다. 고립된 단 하나의 만나는 점이 k가 줄어들 때 만나는 점이 없는 상태로 바뀐다면, 그것이 바로 접점이다. 대수적으로 이것은 $h(x_0) = 0$, 즉 $g'(x_0) = 0$이다.

x_0에 대한 방정식

접점에서 직선과 곡선은 높이와 기울기가 같다.

$$k_0 x_0 = \ln(2\sec x_0), \qquad k_0 = f'(x_0) = \tan x_0.$$

(두 번째 방정식은 앞에서 본 $h(x_0) = 0$과도 같다.) 두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면 $x_0 \tan x_0 = \ln(2\sec x_0)$이고, $0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\tan x_0 \neq 0$이다. 따라서

$$x_0 = \cot x_0 \, \ln(2\sec x_0),$$

이며, 이것이 보이려던 식이다.

x_0과 k_0 구하기

$x_{n+1} = \cot x_n \ln(2\sec x_n)$을 그대로 반복하고 싶어질 수 있다. 이 방법도 통하기는 하지만 느리다. x_0에서 우변의 도함수는 $1 - 2x_0/\sin 2x_0 \approx -0.89$이므로, 반복값은 진동하면서 한 단계에 약 11%씩밖에 가까워지지 않는다. $h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x)$에 뉴턴 방법(Newton's method)을 적용하는 편이 훨씬 낫고, $h'(x) = x\sec^2 x$도 매우 간단하다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \tan x_n - \ln(2\sec x_n)}{x_n \sec^2 x_n}.$$

$x_1 = 1$에서 시작하면(모든 계산은 라디안으로 한다)

$$x_2 \approx 0.9274, \qquad x_3 \approx 0.9147, \qquad x_4 \approx 0.91440.$$

소수 둘째 자리까지 확정하려면 부호 변화를 확인한다. $h(0.905) \approx -0.023 < 0$이고 $h(0.915) \approx +0.0015 > 0$이므로 $0.905 < x_0 < 0.915$이고

$$x_0 \approx 0.91.$$

그러면 $k_0 = \tan x_0 \approx \tan 0.9144 \approx 1.30$이다. $k_0 = \ln(2\sec x_0)/x_0$으로 계산해도 같은 값이 나온다.

검산

- k_0에 대한 두 식이 일치한다: $\tan(0.91440) \approx 1.2981$이고 $\ln(2\sec 0.91440)/0.91440 \approx 1.2981$이다.
- $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $g(x) = \ln(2\sec x)/x$를 수치적으로 훑어보면 $x \approx 0.914$에서 최솟값 1.2981을 가진다.
- $kx - \ln(2\sec x)$의 부호 변화를 세어 보면, $k = 1.29$일 때는 근이 없고 $k = 1.31$일 때는 근이 두 개이다.
- 답이 앞에서 구한 대략적인 범위 $0.44 < k_0 < 1.32$에 들어맞는다.

흔한 실수

- 도(degree) 단위를 쓰는 것. 뉴턴 방법의 반복값과 $\tan x_0$을 포함하여 여기서 쓰는 모든 x 값은 라디안이어야 한다.
- 접할 조건으로 방정식을 하나만 쓰는 것. 곡선과 만나는 것만으로는 부족하다. 기울기도 같아야 하며, k_0을 결정하는 것은 바로 이 두 번째 조건이다.
- 확인 없이 소수 둘째 자리까지 맞다고 주장하는 것. $[0.905, 0.915]$에서 h의 부호가 바뀜을 보이거나, 소수 둘째 자리가 변하지 않을 때까지 반복해야 한다.

STEP 너머

$f(x)/x$의 치역을 살펴 $kx = f(x)$의 근의 개수를 세는 것은 큰 아이디어의 작은 조각이다. 원점을 지나는 접선들과 f의 볼록성은 해석학과 역학에서 **르장드르 변환**(*Legendre transform*)과 볼록 쌍대성(convex duality)의 바탕이 된다. 여기서 뉴턴 방법이 이렇게 빨리 수렴하는 것은 단순근(simple root) 근처에서 이차 수렴(quadratic convergence)하기 때문이고, 반면 고정점 반복(fixed-point iteration)은 비율 $|\varphi'(x_0)|$로 선형 수렴할 뿐이다. 두 사실 모두 해석학이나 수치해석의 첫 강의에서 증명된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 볼록함수와 뉴턴 방법의 오차 분석을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.