풀이

STEP II 1992, 문제 5

순수수학 • 행렬군

> **STEP II 1992, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q5

핵심 아이디어

이 문제의 모든 것은 조건 $wz - xy = 1$에 달려 있으며, 이 조건 덕분에 S에 속한 행렬의 역행렬(inverse)이 특히 간단해진다. 위수(order)가 3인 원소에 관한 부분은 모든 2×2 행렬이 자신의 대각합(trace)과 행렬식(determinant)으로 만들어지는 이차방정식을 만족한다는 사실에 주목하면 가장 잘 다룰 수 있다. S에 속한 행렬에 대해서는 이를 이용하여 $\mathbf{A}^2$를, 그리고 이어서 $\mathbf{A}^3$을 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{I}$로 나타낼 수 있으므로, 조건 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$는 대각합 $w + z$에 대한 조건이 된다.

(시험지에는 $\mathbf{A}$의 오른쪽 아래 성분이 x로 인쇄되어 있지만, 마지막 부분에서 z를 언급하므로 의도한 행렬은 분명히 그 자리에 z가 있는 것이며, 이 풀이에서는 줄곧 그렇게 사용한다.)

풀이

원소의 위수

$g \in G$의 위수는 $g^n = e$를 만족하는 가장 작은 양의 정수 n이다. 여기서 e는 G의 항등원(identity)이다. g의 어떤 양의 거듭제곱도 e와 같지 않으면 g의 위수는 무한이다. 위수가 1인 원소는 항등원뿐이다.

역행렬

다음과 같이 두자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \qquad wz - xy = 1.$$

2×2 행렬의 역행렬에 대한 일반적인 공식은 행렬식으로 나누는데, 여기서는 행렬식이 1이므로 다음과 같다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} z & -x \\ -y & w \end{pmatrix}.$$

직접 곱해 보면 이를 확인할 수 있다. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} wz - xy & 0 \\ 0 & wz - xy \end{pmatrix} = \mathbf{I}$이고, 마찬가지로 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$이다.

S는 군이다

군(group)의 네 가지 공리를 확인한다.

- **닫힘**(*closure*). $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S$이면 $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} = 1 \times 1 = 1$이므로 $\mathbf{AB} \in S$이다.
- **결합법칙**(*associativity*). 행렬의 곱셈에 대해서는 이것이 성립한다고 가정해도 된다.
- **항등원**. $\det\mathbf{I} = 1$이므로 $\mathbf{I} \in S$이고, 모든 $\mathbf{A}$에 대해 $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$이다.
- **역원**(*inverse element*). 위에서 구한 행렬 $\mathbf{A}^{-1}$의 행렬식은 $wz - (-x)(-y) = wz - xy = 1$이므로 이 행렬은 S에 속한다.

따라서 S는 행렬의 곱셈에 대하여 군이다.

자기 역원인 원소와 위수가 2인 원소

$\mathbf{A}^{-1}$과 $\mathbf{A}$를 성분별로 비교하면, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$z = w, \qquad -x = x, \qquad -y = y,$$

즉 $x = y = 0$이고 $z = w$이다. 그러면 행렬식 조건은 $w^2 = 1$이 되므로 $w = \pm 1$이다. 따라서 자기 역원(self-inverse)인 원소는 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{그리고} \quad \mathbf{A} = -\mathbf{I}.$$

원소의 위수가 2인 것은 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$(즉 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$)이고 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$일 때이다. 따라서 위수가 2인 원소는 $-\mathbf{I}$뿐이다.

위수가 3인 원소

$\mathbf{A}$의 대각합을 $t = w + z$라 하자. 제곱하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} w^2 + xy & x(w+z) \\ y(w+z) & xy + z^2 \end{pmatrix}.$$

$xy = wz - 1$이므로 왼쪽 위 성분은 $w^2 + wz - 1 = tw - 1$이고, 오른쪽 아래 성분은 $tz - 1$이다. 따라서

$$\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}. \qquad (*)$$

? 생각해 보기 $(*)$는 $\mathbf{A}^3$을 구하는 데 어떻게 도움이 되는가?

$(*)$에 $\mathbf{A}$를 곱하고, 다시 $(*)$를 이용하여 $\mathbf{A}^2$를 없앤다.

$$\mathbf{A}^3 = t\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = t(t\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \mathbf{A} = (t^2 - 1)\mathbf{A} - t\mathbf{I}.$$

따라서 $\mathbf{A}$의 모든 거듭제곱은 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{I}$의 일차결합이고, 계수를 비교할 수 있다.

$w + z + 1 = 0$인 경우: 이때 $t = -1$이므로 $t^2 - 1 = 0$이고 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$이다. 또한 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$인데, $\mathbf{I}$의 대각합은 $2 \neq -1$이기 때문이다. $\mathbf{A}$의 위수는 3의 약수이고 1이 아니므로 3이다.

역으로, $\mathbf{A}$의 위수가 3이라고 가정하자. 그러면 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$이고 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$이므로 다음이 성립한다.

$$(t^2 - 1)\mathbf{A} = (1 + t)\mathbf{I}.$$

- $t^2 \neq 1$이면 $\mathbf{A} = \dfrac{1+t}{t^2-1}\mathbf{I} = \dfrac{1}{t-1}\mathbf{I}$이고, 이는 항등행렬의 스칼라배 $\lambda\mathbf{I}$이다. 그 행렬식은 $\lambda^2 = 1$이므로 $\lambda = \pm 1$이다. 그런데 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$는 제외되고, $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$는 위수가 2이지 3이 아니다. 따라서 이 경우는 일어날 수 없다.
- $t = 1$이면 식은 $\mathbf{0} = 2\mathbf{I}$가 되어 거짓이다.

남은 가능성은 $t = -1$, 즉 $w + z + 1 = 0$뿐이다. 이로써 "필요충분조건(if and only if)"이 증명되었다.

예. $w = 0, z = -1$로 두고, $wz - xy = 0 + 1 = 1$이 되도록 $x = -1, y = 1$을 택한다.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{I}.$$

검산

- 위의 예를 직접 곱해서 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$임을 확인해 보라.
- 120° 회전 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$는 행렬식이 1이고 대각합이 -1이며, 당연히 위수가 3이다.
- S에 속하는 무작위 유리수 행렬 20 000개에 대해 $\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}$임을 컴퓨터로 확인하였다. 또한 성분이 -4와 4 사이에 있는 $\frac{1}{2}$의 배수인 S의 모든 행렬을 탐색하였다. 대각합이 -1인 48개가 정확히 위수가 3인 행렬이며, 위수가 2인 것은 $-\mathbf{I}$뿐이다.

흔한 실수

- $\mathbf{I}$를 위수가 2인 원소에 포함하는 것. 이것은 자기 역원이지만 위수는 1이다.
- 위수 3에 관한 결과의 한쪽 방향만 증명하는 것. 역을 보이려면 $t^2 \neq 1$인 경우와 $t = 1$인 경우를 배제해야 한다.
- 군의 공리를 확인할 때 역행렬 자체의 행렬식이 1인지 확인하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

군 S는 **특수선형군**(special linear group) SL_2로, 수학에서 가장 중요한 군 중 하나이다. 항등식 $\mathbf{A}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{A} + (\det\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$은 케일리(Cayley)–해밀턴(Hamilton) 정리(Cayley–Hamilton theorem)의 2×2인 경우이다. 즉 모든 정사각행렬은 자신의 특성방정식(characteristic equation)을 만족한다. 이 항등식은 또한 대각합 하나만으로도 SL_2의 원소에 대해 얼마나 많은 것을 알 수 있는지 보여 준다. 위의 논증을 일반화하면, 유한 위수 n을 갖는 원소의 대각합은 어떤 정수 k에 대해 $2\cos(2\pi k/n)$임을 보일 수 있다. 행렬군에 대해 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를, 케일리–해밀턴 정리와 고윳값(eigenvalue)에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.