풀이

STEP II 1992, 문제 4

순수수학 • 미분의 공리

> **STEP II 1992, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.5 절 **공리에서 출발하는 미분**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/derivations.html

핵심 아이디어

네 가지 규칙은 바로 미분(differentiation)의 익숙한 성질들, 즉 곱의 법칙(product rule), 선형성(linearity), 그리고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$이다. 이 문제는 이 성질들만으로 다항식(polynomial) 위에서 이 연산이 완전히 결정됨을 보이라는 것이다. 상수에 대한 요령은 답을 이미 알고 있는 곱, 예를 들어 $1 \times 1 = 1$을 곱의 법칙에 넣어 보는 것이다. 그다음에는 곱의 법칙으로 x의 모든 거듭제곱을 한 단계씩 쌓아 올리고, 나머지는 선형성이 처리한다.

풀이 전체에 걸쳐 주어진 네 가지 규칙만을 사용해야 한다. $\Diamond$가 미분처럼 보인다는 이유만으로 그것에 대해 무엇인가를 가정해서는 안 된다. 그것이 바로 우리가 증명하려는 것이기 때문이다.

풀이

상수

> **생각해 보기** $\Diamond 1$에 대해서는 아무것도 알지 못한다. 규칙들로부터 그 값을 어떻게 알아낼 수 있을까?

곱의 법칙 (i)을 다항식 $f(x) = g(x) = 1$에 적용한다. 두 다항식의 곱은 다시 1이므로

$$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\,\Diamond 1.$$

양변에서 $\lozenge 1$을 빼면 $\lozenge 1 = 0$, 즉 영다항식(zero polynomial)을 얻는다.

이제 $\mathrm{f}(x) = c$를 임의의 상수 다항식(constant polynomial)이라 하자. 그러면 $\mathrm{f}(x) = c \cdot 1$이고 c는 상수이므로, 규칙 (iv)에 의해

$$\lozenge c = \lozenge(c \cdot 1) = c \lozenge 1 = c \cdot 0 = 0.$$

이는 $c = 0$인 경우도 포함하므로, 모든 상수 다항식에 대하여 $\lozenge \mathrm{f}(x) = 0$이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

($\lozenge 1 = 0$에 이르는 또 다른 방법: $x = x \cdot 1$로 쓰면 규칙 (i)과 규칙 (iii)에 의해 $1 = 1 \cdot 1 + x \lozenge 1$이므로 $x \lozenge 1 = 0$이다. 그런데 x를 곱해서 0이 되는 다항식은 영다항식뿐이다.)

거듭제곱 x^2과 x^3

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = x$로 두고 곱의 법칙을 쓴 다음 규칙 (iii)을 쓰면

$$\lozenge x^2 = \lozenge(x \cdot x) = x \lozenge x + x \lozenge x = x + x = 2x.$$

다음으로 $x^3 = x^2 \cdot x$이므로, 곱의 법칙, 규칙 (iii), 그리고 방금 얻은 결과에 의해

$$\lozenge x^3 = x \lozenge x^2 + x^2 \lozenge x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

임의의 다항식

*1*단계: x의 거듭제곱. 수학적 귀납법(induction)으로 다음을 증명한다.

$$\lozenge x^n = nx^{n-1} \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

$n = 1$일 때 이것은 규칙 (iii)이다. 어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. $x^{k+1} = x^k \cdot x$로 쓰고 곱의 법칙, 규칙 (iii), 귀납 가정(induction hypothesis)을 차례로 쓰면

$$\lozenge x^{k+1} = x \lozenge x^k + x^k \lozenge x = x \cdot kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k,$$

이므로 $n = k + 1$일 때도 결과가 성립한다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다. $n = 0$일 때 $x^0 = 1$은 상수이므로 첫 번째 부분에 의해 $\lozenge x^0 = 0$이다. 모든 경우에 $\lozenge x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n$이다.

*2*단계: 합. 규칙 (ii)는 두 다항식에 대해 진술되어 있지만, 항의 개수에 대한 귀납법으로 임의의 유한 합으로 확장된다. $\lozenge(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) = \lozenge \mathrm{f}_1 + \cdots + \lozenge \mathrm{f}_m$이면, $(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) + \mathrm{f}_{m+1}$에 규칙 (ii)를 적용하여 $m + 1$개의 항에 대한 같은 명제를 얻는다.

*3*단계: 종합하기. 모든 다항식은 상수 계수(coefficient) a_k를 써서 $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots +$

$a_n x^n$ 꼴로 쓸 수 있다. 2단계, 각 항에 대한 규칙 (iv), 그리고 1단계를 차례로 쓰면

$$\begin{aligned}\Diamond \mathrm{h}(x) &= \Diamond(a_0) + \Diamond(a_1 x) + \cdots + \Diamond(a_n x^n) \\ &= a_0 \Diamond 1 + a_1 \Diamond x + \cdots + a_n \Diamond x^n \\ &= 0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{h}(x)\big),\end{aligned}$$

이고, 이것이 증명해야 할 것이었다.

검산

미분이 실제로 네 가지 규칙을 모두 만족하는지 확인해 둘 가치가 있다. 그렇지 않다면 이 결과는 공허한(vacuous) 것이 되기 때문이다. 실제로 만족한다(곱의 법칙, 선형성, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$). 또한 풀이에서처럼 네 가지 규칙만을 써서 컴퓨터로 $\Diamond$를 구현하고, 무작위 다항식 500개(차수 7 이하, 분수 계수)에 대해 보통의 도함수(derivative)와 비교하였다. 둘은 항상 일치했고, 수치적인 차분몫(difference quotient)과도 일치했다. 예를 들어 규칙들로부터 $\Diamond x^3 = 3x^2$를 얻는다.

흔한 실수

- "상수의 도함수는 영이므로 $\Diamond c = 0$이다"라고 말하는 것. 이는 증명하려는 것을 가정하는 것이다. 영이라는 값은 규칙들로부터 나와야 한다.
- 마지막 부분에서 상수항을 빠뜨리는 것. 귀납법은 $n = 1$에서 시작하므로, a_0에는 상수에 대한 결과가 필요하다.
- 여러 항의 합에 규칙 (ii)를 쓰면서, 그것이 귀납법에 의해 두 항에서 확장된다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

규칙 (i), (ii), (iv)를 만족하는 연산을 **대수적 미분**(*derivation*)이라 하며, 대수적 미분은 대수학과 기하학 전반에서 연구된다. 이 문제는 다항식 위에서 대수적 미분이 x에서의 값만으로 완전히 결정됨을 보여 준다. 더 일반적으로 $\Diamond \mathrm{h} = \mathrm{p}(x)\,\mathrm{h}'(x)$이며, 여기서 $\mathrm{p} = \Diamond x$이다. 미분기하학(differential geometry)에서는 이 아이디어가 벡터장(vector field)의 정의가 된다. 다항식환(polynomial ring)이라는 대수적 맥락에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.