풀이

STEP II 1992, 문제 3

순수수학 • 하이포사이클로이드와 넓이

> **STEP II 1992, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 **미끄러지지 않고 구르기**(*rolling without slipping*)에서 나온다. 작은 원이 큰 원을 따라 굴러간 호의 길이는, 작은 원에서 접촉했던 호의 길이와 같다. 이로부터 작은 원이 얼마나 회전했는지가 정해지고, 그러면 B는 그저 "중심 P에 올바른 방향의 단위벡터를 더한 것"이다. 그래프를 그릴 때는 삼배각 공식(triple-angle formulae)을 쓰면 좌표가 아주 깔끔하게 정리된다는 점에 주목하면 도움이 된다.

풀이

B의 좌표 구하기

작은 원(반지름 1)은 큰 원(반지름 4)의 안쪽에 계속 접해 있으므로, 그 중심은 언제나 O로부터 거리 $4-1=3$에 있다. ϕ를 각 AOP라 하면

$$P = (3\cos\phi,\ 3\sin\phi).$$

T를 현재의 접점(point of contact)이라 하자. 이 점은 반직선 OP의 연장선 위에 있으므로 $T = (4\cos\phi, 4\sin\phi)$이고, P에서 T로 향하는 방향은 x축과 각 ϕ를 이룬다.

처음에 B는 접점인 A에 있었다. 미끄러짐이 없으므로, 큰 원의 호 AT의 길이는 작은 원의 호 BT의 길이와 같다.

$$4\phi = 1 \times \angle BPT \quad \Longrightarrow \quad \angle BPT = 4\phi.$$

생각해 보기 P에서 잰 B의 각은 $\phi + 4\phi$인가, $\phi - 4\phi$인가?

P가 O를 중심으로 시계 반대 방향으로 움직이면, 작은 원은 큰 원의 안쪽을 따라 구르므로 **시계 방향**으로 회전한다(그림의 화살표). 점 B는 이전의 접점이었으므로 새로운 접점 T보다 뒤에 남겨져 있다. 즉 작은 원을 따라 T에서 B로 가는 것은 시계 방향으로 4ϕ만큼 회전하는 것이다. 따라서 방향 $\overrightarrow{PB}$는 x축과 각 $\phi - 4\phi = -3\phi$를 이루고, $PB = 1$이므로

$$\begin{aligned} B &= P + (\cos(-3\phi),\ \sin(-3\phi)) \\ &= (3\cos\phi + \cos 3\phi,\ 3\sin\phi - \sin 3\phi), \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (확인: $\phi = 0$이면 $(4,0) = A$이다.)

C 그리기

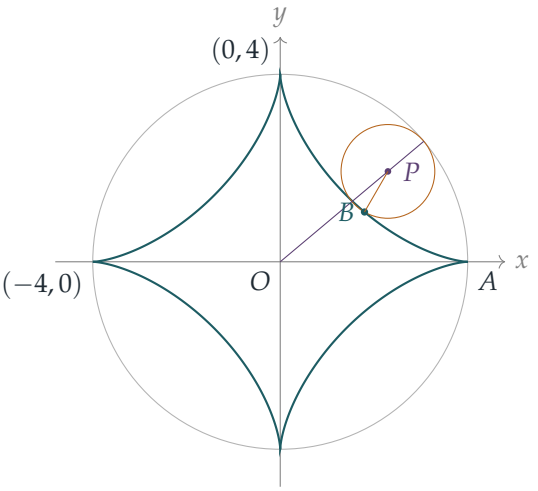
$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$와 $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$를 이용하면

$$x = 4\cos^3\phi, \qquad y = 4\sin^3\phi.$$

따라서 C는 곡선 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$, 즉 **아스트로이드**(*astroid*)이다. 몇 가지 특징은 다음과 같다.

- B가 큰 원 위에 있을 필요충분조건은 $\cos^6\phi + \sin^6\phi = 1$, 즉 $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$이고, 이때 점 $(\pm 4, 0)$, $(0, \pm 4)$를 얻는다. 여기서 B는 접점이므로 순간적으로 정지하며, 곡선은 첨점(cusp)을 가진다.
- 곡선은 두 축에 대해 모두 대칭이다(ϕ를 $-\phi$ 또는 $\pi - \phi$로 바꾸어 보라).
- 제1사분면(first quadrant)에서 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12\sin^2\phi\cos\phi}{-12\cos^2\phi\sin\phi} = -\tan\phi$이므로, 곡선은 $(4,0)$에서 x축을 따라 출발하여 $(0,4)$에 y축을 따라 도착한다. 곡선은 **안쪽으로** 휘어 있다. $\phi = \frac{\pi}{4}$에서 곡선은 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$를 지나는데, 이는 직선 $x + y = 4$보다 한참 안쪽이다.

P가 한 바퀴 돌고 나면(ϕ가 0에서 2π까지) 작은 원은 OP에 대해 상대적으로 3번 회전하고 B는 다시 A로 돌아온다. 따라서 C는 첨점이 네 개인 닫힌곡선이다.



넓이

$x = 3\cos\phi + \cos 3\phi$이고

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 3\cos\phi - 3\cos 3\phi,$$

이므로

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 9\cos^2\phi - 6\cos\phi\cos 3\phi - 3\cos^2 3\phi.$$

한 주기 전체에 걸쳐, 임의의 정수 $k \neq 0$에 대해 $\int_0^{2\pi} \cos^2 k\phi \,\mathrm{d}\phi = \pi$이고($\frac{1}{2}(1 + \cos 2k\phi)$로 써 보라),

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\cos 3\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 4\phi + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

따라서

$$\text{넓이} = \int_0^{2\pi} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 9\pi - 0 - 3\pi = 6\pi.$$

답이 양수인 것은 당연하다. ϕ가 증가할 때 B는 C를 시계 반대 방향으로 돌기 때문이다.

검산

- C는 안쪽으로 휘어 있으므로, 그 영역은 네 첨점을 꼭짓점으로 하는 넓이 32인 정사각형 안에 있다. 실제로 $6\pi \approx 18.85 < 32$이다.
- 수치적으로, 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값과 C에 내접하는 200 000각형의 넓이를 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 값이 모두 $18.8496\ldots = 6\pi$이다.
- 아스트로이드의 표준 넓이 공식 $\frac{3}{8}\pi a^2$에 $a = 4$를 대입해도 6π를 얻는다.

- 각 첨점에서 B의 수치적 속력은 0이며, 이는 구르기 조건이 요구하는 대로 B가 큰 원에 닿을 때 정지해 있음을 확인해 준다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{PB}$의 각을 $+5\phi$나 $+3\phi$로 잡는 것. 작은 원은 P가 O 주위를 도는 방향과 **반대** 방향으로 회전한다.
- P의 경로의 반지름으로 3 대신 4를 쓰는 것.
- 뾰족한 첨점 대신 둥근 끝을 그리거나, 바깥쪽으로 불룩한 호를 그리는 것.

STEP 너머

한 원이 다른 원의 안쪽을 따라 구를 때 그 원 위의 한 점이 그리는 곡선을 **하이포사이클로이드**(*hypocycloid*)라 하고, 바깥쪽을 따라 구르면 **에피사이클로이드**(*epicycloid*)가 된다. 반지름의 비가 $4:1$이면 아스트로이드를, $3:1$이면 첨점이 세 개인 델토이드(deltoid)를 얻는다. 넓이 공식 $\int x\,\mathrm{d}y$는 그린 정리(Green's theorem)의 특수한 경우로, 이 정리는 닫힌곡선을 따라 도는 적분을 그 내부 영역에서의 이중적분(double integral)과 연결해 준다. 이는 대학 1학년 벡터 미적분학(vector calculus)의 백미 중 하나이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 $z = 3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}$를 이용하여 이러한 구르는 곡선들을 우아하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.