풀이

STEP II 1992, 문제 2

순수수학 • 클레로 미분방정식

> **STEP II 1992, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q2

핵심 아이디어

이 방정식은 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$에 대하여 $y = xp - f(p)$ 꼴이며, 이를 클레로(Clairaut) 방정식(Clairaut equation)이라 한다. 한 번 미분하면 다루기 까다로운 p 항들이 소거되고, 남은 식은 훨씬 간단한 두 방정식으로 인수분해된다. 다만 미분하면 정보가 사라지므로(상수가 없어진다), 후보가 되는 해는 모두 $(*)$에 다시 대입하여 상수를 결정해야 한다.

풀이

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$로 두면 $(*)$는 $y = xp - \cosh p$가 된다.

미분하기

양변을 x에 대하여 미분한다. 이때 xp에는 곱의 미분법(product rule)을, $\cosh p$에는 연쇄법칙(chain rule)을 쓴다.

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \sinh p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

양변의 p가 소거되어 다음이 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x - \sinh p) = 0, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(x - \sinh\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$이거나 $x - \sinh\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$이다. 이것이 보이려던 것이다.

두 방정식

첫째 방정식. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$을 두 번 적분하면 일반해(general solution)

$$y = Ax + B, \qquad A, B \text{ 는 임의의 상수.}$$

를 얻는다.

둘째 방정식. 이 경우 $\sinh p = x$이다. sinh는 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사(bijection)이므로, 모든 x에 대하여 $p = \sinh^{-1} x$이다. $u = \sinh^{-1} x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned} y &= \int \sinh^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C, \qquad C \text{ 는 임의의 상수.} \end{aligned}$$

$(*)$의 해

$(*)$의 해는 모두 유도된 두 방정식 중 하나를 만족하지만, 그 역은 성립하지 않는다. 미분하는 과정에서 조건 하나를 버렸기 때문이다. 따라서 각 해의 족을 $(*)$에 다시 대입한다.

> **생각해 보기** 유도된 방정식들은 각각 두 개, 한 개의 임의의 상수를 갖는다. 이것들이 모두 $(*)$와 같은 일계 방정식의 해가 될 수 없는 이유는 무엇인가?

일계 방정식(first-order equation)은 매개변수가 하나인 해의 족을 가져야 하는데, 위의 각 족은 상수가 너무 많거나 확인되지 않은 상수를 하나 가지고 있다. $(*)$를 미분해서 알 수 있는 것은 $y - xp + \cosh p$가 **상수**라는 사실뿐이며, 우리는 그 상수가 0이어야 한다.

직선. $y = Ax + B$이면 $p = A$이고, $(*)$는 다음이 된다.

$$Ax + B = Ax - \cosh A \iff B = -\cosh A.$$

따라서 매개변수가 하나인 직선의 족

$$y = Ax - \cosh A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

를 얻는다.

다른 곡선. $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$이면 $p = \sinh^{-1} x$이므로 $\sinh p = x$이고 $\cosh p = \sqrt{1+\sinh^2 p} = \sqrt{1+x^2}$이다($\cosh p > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다). 그러면 $(*)$의 우변은

$$xp - \cosh p = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2},$$

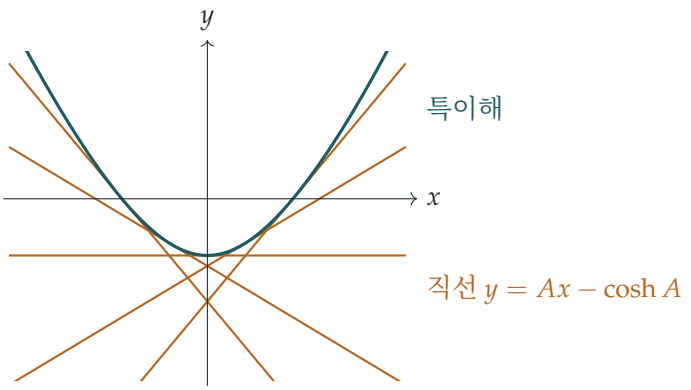
이고, 이것은 정확히 $C = 0$일 때 y와 같다. 이로써 임의의 상수를 포함하지 않는 해가 하나 더 생긴다.

$$y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}.$$

따라서 $(*)$의 해는 직선 $y = Ax - \cosh A$(각 실수 A에 대하여)와 하나의 곡선 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}$이다.

두 해의 관계

기울기가 A인 직선은 $x = \sinh A$에서 곡선에 접한다. 그 점에서 곡선의 기울기는 $\sinh^{-1}(\sinh A) = A$이고, 높이는 $A\sinh A - \cosh A$로 직선의 높이와 같다. 곡선은 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$이므로 아래로 볼록(convex)하고, 이 접선들은 모두 곡선의 아래쪽에 놓인다. 이 곡선은 직선족의 **포락선**(envelope)이며, **특이해**(singular solution)라 부른다.



이것으로 미묘한 점 하나도 설명된다. 조건 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x - \sinh p) = 0$은 각 점마다 성립하는 조건이므로, 해가 두 유형 사이를 오갈 수 있다. 예를 들어 $x = \sinh A$까지는 곡선을 따라가다가 그 점의 접선을 따라 이어 가면, 도함수가 연속이면서 모든 곳에서 $(*)$를 만족하는 함수가 된다. 이런 조각 함수들은 위에서 구한 해들로 만들어지며, 기대하는 답은 직선족과 특이 곡선이다.

검산

- $A = 0$일 때 직선은 $y = -1$이고, 곡선은 $y(0) = 0 - 1 = -1$, 기울기 $\sinh^{-1}0 = 0$이다. 예상대로 두 그래프는 $(0, -1)$에서 접한다.
- 수치적으로 $x = 0.7$이면 $\sinh^{-1}0.7 \approx 0.6527$이므로 곡선에서 $y \approx 0.4569 - 1.2207 = -0.7638$이고, $xp - \cosh p \approx 0.4569 - 1.2207$과 일치한다. y에 $C \neq 0$을 더하면 정확히 C만큼 어긋난다.
- 임의의 점들에서 유한 차분(finite differences)으로 $(*)$를 확인하면, 모든 직선 $y = Ax - \cosh A$와 특이 곡선에 대하여 잔차(residual)가 반올림 오차 수준이다.

흔한 실수

- $y = Ax + B$나 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2} + C$에서 멈추는 것. 이것들은 미분한 방정식의 해이며, $(*)$ 자체에서 $B = -\cosh A$와 $C = 0$이 강제된다.
- 인수 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$를 "약분"하여 특이해를 아예 놓치는 것.

STEP 너머

$y = xp - f(p)$ 꼴의 방정식은 클레로 방정식이다. 그 일반해는 언제나 직선족 $y = cx - f(c)$이고, 특이해는 그 직선족의 포락선이다. 여기서는 $f = \cosh$이며, 포락선 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}$는 cosh의 르장드르(Legendre) 변환(Legendre transform)이다. 이 구성은 역학(라그랑지안(Lagrangian)에서 해밀토니안(Hamiltonian)으로 넘어갈 때)과 열역학에서 등장한다. 또한 이 예는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)의 조건이 성립하지 않으면 일계 방정식의 해가 유일하지 않을 수 있음을 보여 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 일계 방정식과 그 유일성 정리를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.