풀이

STEP II 1992, 문제 15

확률과 통계 • 무작위 행보

> **STEP II 1992, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q15

핵심 아이디어

점이 s번의 이동 중 R번을 양의 방향으로 움직이면 최종 위치는 $x = R - (s - R) = 2R - s$이고, R는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 따라서 여기서 다루는 확률은 모두 이항계수(binomial coefficient)의 합이다. 홀짝성(parity)이 많은 일을 해 준다. 짝수 번 이동한 뒤에는 $x = 2$와 $x = 4$만 가능하고, 홀수 번 이동한 뒤에는 $x = 3$과 $x = 5$만 가능하므로, 각 $\mathrm{P}(s)$는 이웃한 이항계수 단 두 개의 합이다. 그러면 파스칼의 법칙(Pascal's rule)에 의해 그 합이 하나의 이항계수로 줄어든다. 최댓값을 구할 때는 짝수 s와 홀수 s를 따로 나누어 연속한 두 항의 비(ratio)를 살펴본다.

풀이

처음 s번의 이동 중 양의 방향으로 움직인 횟수를 R라 하자. 각 이동은 독립이고 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 양의 방향이므로 $R \sim \mathrm{B}(s, \frac{1}{2})$이고

$$\mathrm{P}(R = r) = \binom{s}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

s번 이동한 뒤의 위치는 $X = 2R - s$이므로, $X = x$일 필요충분조건은 $R = \frac{1}{2}(s + x)$이다. 특히 X는 s와 홀짝이 같다.

$\mathrm{P}(5)$와 $\mathrm{P}(6)$의 값

$s = 5$일 때는 $x = 3$과 $x = 5$만 가능하며, 각각 $R = 4$와 $R = 5$가 필요하다.

$$\mathrm{P}(5) = \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right] \frac{1}{2^5} = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}.$$

$s = 6$일 때는 $x = 2$와 $x = 4$만 가능하며, 각각 $R = 4$와 $R = 5$가 필요하다.

$$\mathrm{P}(6) = \left[\binom{6}{4} + \binom{6}{5}\right]\frac{1}{2^6} = \frac{15+6}{64} = \frac{21}{64}.$$

일반적인 짝수의 경우

$s = 2k$일 때 가능한 목표 지점은 $x = 2$와 $x = 4$이고, 각각 $R = k+1$과 $R = k+2$가 필요하다. 파스칼의 법칙 $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$에 의해

$$\mathrm{P}(2k) = \left[\binom{2k}{k+1} + \binom{2k}{k+2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \binom{2k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \binom{2k+1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

이다. 마지막 단계에서는 $(2k+1) - (k+2) = k-1$이므로 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다. 이 식은 $k = 1$일 때도 성립한다. 이때 $\binom{2}{3} = 0$이므로 $x = 4$에 해당하는 항이 그냥 없어지고, 공식은 양의 방향으로 두 번 이동할 확률인 $\frac{1}{4}$를 준다.

홀수의 경우

$s = 2k+1$일 때 목표 지점은 $x = 3$과 $x = 5$이고, 각각 $R = k+2$와 $R = k+3$이 필요하다. 같은 방법으로

$$\mathrm{P}(2k+1) = \left[\binom{2k+1}{k+2} + \binom{2k+1}{k+3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \binom{2k+2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

$k = 2$이면 이 식은 $\binom{6}{1}/32 = \frac{3}{16}$이 되어 $\mathrm{P}(5)$와 일치한다.

최댓값

$k \geq 1$에 대하여 $a_k = \mathrm{P}(2k)$, $k \geq 1$에 대하여 $b_k = \mathrm{P}(2k+1)$이라 하자($b_0 = \mathrm{P}(1) = 0$임에 주의한다). 이 값들은 모두 양수이므로 연속한 두 항을 그 비로 비교할 수 있다.

> **생각해 보기** 두 이항계수의 비는 어떻게 간단히 할까?

둘 다 계승(factorial)으로 쓰고 약분한다. 짝수 항에 대해서는

$$\frac{\binom{2k+3}{k}}{\binom{2k+1}{k-1}} = \frac{(2k+3)!}{k!\,(k+3)!}\cdot\frac{(k-1)!\,(k+2)!}{(2k+1)!} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{k(k+3)},$$

이므로

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{4k(k+3)} = \frac{4k^2+10k+6}{4k^2+12k}.$$

분모가 양수이므로 이 비가 1보다 클 필요충분조건은 $10k+6 > 12k$, 즉 $k < 3$이다. $k = 3$일 때 비는 1과 같고, $k > 3$일 때는 1보다 작다. 따라서

$$a_1 < a_2 < a_3 = a_4 > a_5 > a_6 > \cdots,$$

이고, 짝수 번 이동했을 때의 최댓값은 $a_3 = a_4 = \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64}$이다. (확인: $\mathrm{P}(8) = \binom{9}{3}/2^8 = 84/256 = 21/64$.)

홀수 항에 대해서도 같은 방식으로 약분하면

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+4)(2k+3)}{4k(k+4)} = \frac{4k^2+14k+12}{4k^2+16k},$$

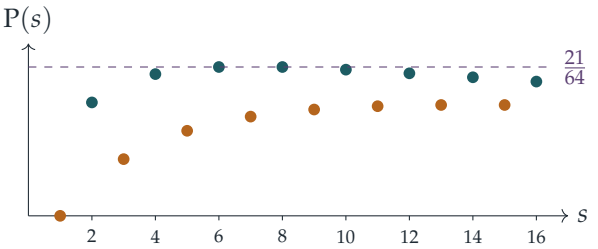
이고, 이 비는 $k < 6$일 때 1보다 크고, $k = 6$일 때 1과 같으며, $k > 6$일 때 1보다 작다. 따라서 홀수 번 이동했을 때의 최댓값은

$$b_6 = b_7 = \mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \binom{14}{5}\frac{1}{2^{13}} = \frac{2002}{8192} = \frac{1001}{4096}.$$

마지막으로 $\frac{21}{64} = \frac{1344}{4096} > \frac{1001}{4096}$이므로, 어떤 홀수의 경우도 짝수의 경우의 최댓값을 넘지 못한다. 그러므로 $\mathrm{P}(s)$는

$$s = 6 \quad \text{그리고} \quad s = 8.$$

일 때 최댓값 $\frac{21}{64}$을 가진다.



청록색 점은 짝수 s, 호박색 점은 홀수 s에 해당한다. 두 수열은 서로 별개이며 각각 증가했다가 감소하고, 짝수 쪽이 항상 위에 있다.

검산

- 작은 경우를 손으로 계산하기: $\mathrm{P}(2) = \frac{1}{4}$(오른쪽으로 두 번), $\mathrm{P}(3) = \frac{1}{8}$(오른쪽으로 세 번)이고, $k = 1$을 대입하면 공식은 마땅히 그래야 하듯 $\binom{3}{0}/2^2 = \frac{1}{4}$와 $\binom{4}{0}/2^3 = \frac{1}{8}$을 준다.
- 컴퓨터로 이 보행을 정확히 열거해 보면(분수 계산, $s \le 60$) 두 공식이 모두 맞고, 전체 최댓값이 $\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64} \approx 0.328$, 홀수의 경우 최댓값이 $\mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \frac{1001}{4096} \approx 0.244$임이 확인된다.

흔한 실수

- 모든 s에 대해 목표 지점 네 개를 전부 더하는 것. 그중 절반은 홀짝성 때문에 불가능하다.
- 짝수의 경우 최댓값을 구하고 멈추는 것. 홀수 값들은 별개의 수열을 이루므로, 그 최댓값이 더 작다는 것을 확인해야 한다.
- "$k < 3$이면 비 > 1"에서 멈추고 $s = 6$만 답하는 것. $k = 3$일 때 비가 1이므로 $s = 8$에서도 같은 값이 나온다.

STEP 너머

이것은 확률론의 핵심 대상 가운데 하나인 단순 대칭 무작위 행보(simple symmetric random walk)이다. s번 이동한 뒤의 위치는 $\sqrt{s}$ 정도로 퍼져 나가므로, 고정된 유한 구간 안에 있을 확률은 처음에는 증가하다가 결국 0으로 줄어든다. $s = 7$ 근처의 최고점은 퍼진 정도가 구간의 크기와 비슷해지는 곳이다. 같은 이항 세기는 반사 원리(reflection principle)로 이어지고, 1차원 무작위 행보가 확률 1로 원점으로 돌아온다는 사실로도 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에 무작위 행보를 다룬 좋은 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.