풀이

STEP II 1992, 문제 14

역학 • 연결된 입자와 도르래

> **STEP II 1992, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q14

핵심 아이디어

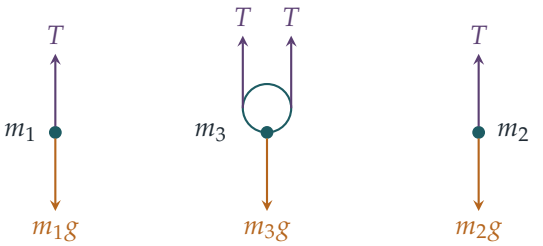
움직이는 물체는 셋이지만 줄은 하나뿐이므로, 줄 전체에 걸쳐 장력(tension) T는 하나이고 세 가속도(acceleration)를 잇는 구속 조건(constraint)도 하나이다. 각 입자에 대해 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)을 쓰고(도르래(pulley) P_3과 그에 달린 입자는 함께 움직인다), 줄의 길이 조건을 쓰면 미지수 네 개에 대한 일차방정식 네 개를 얻는다. 그러면 정지 조건은 단지 P_3의 가속도가 0이라는 뜻이 된다.

풀이

모형

도르래는 매끄럽고(smooth) 가벼우며 줄은 가볍고 늘어나지 않으므로(inextensible), 장력은 줄 전체에서 같은 값 T를 가진다. P_3이 가벼우므로 P_3과 질량 m_3인 입자는 질량 m_3인 하나의 물체를 이루며, 이 물체는 연직 방향의 줄 **두** 가닥에 매달려 있고 각 가닥은 크기 T의 힘으로 위로 당긴다.

모든 변위는 **아래쪽**을 기준으로 잰다. 고정 도르래로부터 입자 m_1, 입자 m_2, 도르래 P_3까지 아래로 잰 깊이를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하고, 가속도를 a_1, a_2, a_3(아래쪽이 양의 방향)이라 하자.



운동 방정식

각 물체에 대해 연직 방향(아래쪽이 양)으로 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - T,$$
$$m_3 a_3 = m_3 g - 2T.$$

줄의 구속 조건

도르래에 감긴 고정된 길이를 무시하면, 줄은 P_1에서 m_1까지 내려가는 가닥(길이 x_1), 고정 도르래에서 P_3까지 내려가는 두 가닥(각각 길이 x_3), P_2에서 m_2까지 내려가는 가닥(길이 x_2)으로 이루어진다. 줄이 늘어나지 않으므로

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{상수}, \qquad \text{따라서} \qquad a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

이다. 여기서 뒤의 식은 두 번 미분하여 얻는다.

> **생각해 보기** x_3의 계수가 왜 1이 아니라 2인가?

P_3이 거리 d만큼 내려가면 이를 받치는 두 가닥이 모두 d만큼 길어지므로, 줄이 $2d$만큼 소모된다. 이 길이는 바깥쪽 가닥에서 와야 하므로 $x_1 + x_2$는 $2d$만큼 줄어든다. 이 인수를 놓치는 것이 이 문제를 틀리는 가장 흔한 원인이다.

장력

각 운동 방정식을 해당 질량으로 나누면

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{2T}{m_3}.$$

이를 $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$에 대입하면

$$4g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0.$$

양변에 $m_1 m_2 m_3$을 곱하고 T에 대해 풀면

$$\boxed{T = \frac{4m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1 m_2}}$$

이다. 방정식의 어떤 것도 위치에 의존하지 않으므로, 이 식은 운동하는 동안 내내(입자가 도르래에 닿을 때까지) 성립한다.

P_3이 정지해 있을 때

계는 정지 상태에서 출발하므로, P_3이 계속 정지해 있을 필요충분조건은 $a_3 = 0$, 즉 $2T = m_3 g$이다. 앞에서 구한 T의 값을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{8m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1 m_2} &= m_3 g \\ \iff \quad 8m_1 m_2 &= m_3(m_1+m_2)+4m_1 m_2 \\ \iff \quad 4m_1 m_2 &= m_3(m_1+m_2), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $m_3 g > 0$으로 나누고 양수인 분모를 곱하였다. 따라서 $4m_1 m_2 = m_3(m_1+m_2)$이면 $a_3 = 0$이고, 요구한 대로 P_3은 정지해 있다. (각 단계는 거꾸로도 성립하므로, 이 조건은 충분조건일 뿐 아니라 필요조건이기도 하다.)

바깥쪽 입자들은 정지해 있을 필요가 없다는 점에 주의하자. 이때 $T = \frac{1}{2} m_3 g$이고 $a_1 = g - T/m_1 = -a_2$인데, 이는 $m_1 = m_2$가 아닌 한 0이 아니다. 한 입자는 올라가고 다른 입자는 같은 빠르기로 내려가며, 줄은 P_3을 움직이지 않은 채 그 아래로 미끄러진다.

검산

- 대칭인 경우 $m_1 = m_2 = m$: 조건은 $4m^2 = 2mm_3$, 즉 $m_3 = 2m$이 된다. 이는 바로 정적 평형 $2T = 2mg = m_3 g$로, 당연하면서도 안심이 되는 결과이다.
- $m_3 \to \infty$이면 $T \to \dfrac{4m_1 m_2 g}{m_1+m_2}$인데, 이는 익숙한 애트우드 기계(Atwood machine)의 장력 $\dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1+m_2}$의 두 배이다. 이것이 옳다. 무거운 P_3은 $a_3 \to g$로 자유낙하하므로 가닥들이 빠르게 가속된다. $m_3 \to 0$이면 $T \to 0$인데, 질량이 없는 도르래는 어떤 알짜힘도 지탱할 수 없기 때문이다.
- 수치로 확인해 보면, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$, $g = 9.8$(SI 단위)일 때 공식은 $T \approx 21.38\,\mathrm{N}$을 준다. 에너지(라그랑주(Lagrangian)) 방법으로 문제를 독립적으로 풀어도 같은 가속도 $a_1 \approx -0.891$, $a_2 \approx 2.673$, $a_3 \approx -0.891\,\mathrm{m\,s^{-2}}$를 얻는다. $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$이면 정지 조건이 성립하며, 실제로 $a_3 = 0$이고 $a_1 = -a_2 = -4.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다.

흔한 실수

- P_3이 두 가닥에 매달려 있다는 것을 잊고 구속 조건을 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$으로 쓰는 것.
- P_3에 작용하는 힘이 T가 아니라 $2T$라는 것을 잊는 것.
- P_3이 정지해 있으면 계 전체가 정지해야 한다고 가정하는 것. $m_1 = m_2$가 아니라면 그렇지 않다.

STEP 너머

구속 조건 $x_1 + x_2 + 2x_3 =$ 상수는 계의 자유도(degrees of freedom)를 둘로 줄이며, 이런 계를 다루는 가장 깔끔한 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)이다. 에너지를 독립 좌표로 나타내기만 하면 장력은 전혀 필요하지 않다(장력은 "구속력"이다). 앞의 수치 검산도 이 방법으로 한 것이다. 이 내용은 대학 1학년 동역학에서 만나게 된다. 도르래 같은 구속된 계에 뉴턴의 법칙을 꼼꼼히 적용하는 모습을 보기에 좋은 책으로 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.